PLAN WYNIKOWY

Przedmiotowy system oceniania z matematyki. Liceum Ogólnokształcące zakres podstawowy.

Wstęp

Plan wynikowy kształcenia matematycznego jest dostosowany do programu nauczania matematyki w liceach i technikach – zakres podstawowy, autorstwa Marcina Kurczaba, Elżbiety Kurczab i Elżbiety Świdy, zamieszczonego na stronie internetowej www.pazdro.com.pl wiosną 2012 roku. Jest on przeznaczony dla nauczycieli oraz uczniów pracujących z podręcznikiem „Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Zakres podstawowy" – numer ewidencyjny w wykazie podręczników: 412/1/2012 oraz zbiorami zadań do matematyki, autorstwa Elżbiety Kurczab, Marcina Kurczaba i Elżbiety Świdy, wydanymi przez Oficynę Edukacyjną * Krzysztof Pazdro.

Plan jest wykazem wiadomości i umiejętności, jakie powinien mieć uczeń ubiegający się o określone oceny na poszczególnych etapach edukacji w liceum lub w technikum.

Wymagania stawiane przed uczniem podzieliliśmy na trzy grupy:

- Wymagania podstawowe (zawierają wymagania konieczne);
- Wymagania dopełniające (zawierają wymagania rozszerzające);
- Wymagania wykraczające.

Wymagania wykraczające zawierają w sobie wymagania dopełniające, te zaś zawierają wymagania podstawowe.

Ocenę dopuszczającą powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące 40–60% wymagań podstawowych, zaś ocenę dostateczną uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 60 % wymagań podstawowych.

Ocenę dobrą powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące do 75% wymagań dopełniających, zaś ocenę bardzo dobrą uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 75% wymagań dopełniających.

Ocenę celującą powinien uzyskać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności zawarte w wymaganiach wykraczających.

Aby ułatwić nauczycielom, uczniom i ich rodzicom korzystanie z planu wynikowego, dla poszczególnych wymagań przedstawiamy przykładowe zadania, które dokładniej określają stopień trudności problemów wymaganych na poszczególne oceny. Przedstawione zadania **nie mogą** w żadnym wypadku stanowić przykładowego zbioru zadań, z którego nauczyciel powinien czerpać zadania na ewentualny egzamin sprawdzający, lecz mają jedynie wskazać stopień trudności zadań na poszczególne oceny.

Plan wynikowy nie może być „dokumentem sztywnym". Zakładamy, że każdy nauczyciel zmodyfikuje ten plan, dostosowując go zarówno do liczby godzin przeznaczonych na realizację materiału, jak i do możliwości uczniów.

Autorzy

1. Wprowadzenie do matematyki. Pojęcia podstawowe

Tematyka zajęć:

- Zdanie. Zaprzeczenie zdania
- Koniunkcja zdań. Alternatywa zdań
- Implikacja. Równoważność zdań. Definicja. Twierdzenie
- Prawa logiczne. Prawa De Morgana
- Zbiór. Działania na zbiorach
- Zbiory liczbowe. Oś liczbowa
- Rozwiązywanie prostych równań
- Przedziały
- Rozwiązywanie prostych nierówności
- Zdanie z kwantyfikatorem

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi odróżnić zdanie logiczne od innej wypowiedzi; – umie określić wartość logiczną zdania prostego; – potrafi zanegować zdanie proste i określić wartość logiczną zdania zanegowanego; – potrafi rozpoznać zdania w postaci koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności zdań; – potrafi zbudować zdania złożone w postaci koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności zdań z danych zdań prostych; – potrafi określić wartości logiczne zdań złożonych, takich jak koniunkcja, alternatywa, implikacja i równoważność zdań; – potrafi odróżnić definicję od twierdzenia; – zna prawa De Morgana (prawo negacji alternatywy oraz prawo negacji koniunkcji)	Uczeń: – potrafi budować zdania złożone i oceniać ich wartości logiczne; – potrafi wnioskować o wartościach zdań składowych wybranych zdań złożonych na podstawie informacji o wartościach logicznych zdań złożonych; – rozumie budowę twierdzenia matematycznego; potrafi wskazać jego założenie i tezę; – potrafi zbudować twierdzenie odwrotne do danego oraz ocenić prawdziwość twierdzenia prostego i odwrotnego; – potrafi sprawnie posługiwać się symboliką matematyczną dotyczącą zbiorów; – potrafi podać przykłady zbiorów A i B, jeśli dana jest suma $A \cup B$, iloczyn $A \cap B$ albo różnica $A - B$; – zna pojęcie dopełnienia zbioru i potrafi	Uczeń: – potrafi negować zdania złożone z koniunkcji i/lub alternatyw zdań; – potrafi stosować wiadomości z logiki do wnioskowania matematycznego; – potrafi stosować działania na zbiorach do wnioskowania na temat własności tych zbiorów; – potrafi określić dziedzinę i zbiór elementów spełniających równanie z jedną niewiadomą, zawierające wyrażenia wymierne lub pierwiastek stopnia drugiego; – zna prawa De Morgana dla zdań z kwantyfikatorem; – potrafi podać negację zdania z kwantyfikatorem i ocenić jej wartość logiczną.

i potrafi je stosować; – potrafi określić wartość logiczną zdania, które jest negacją koniunkcji, oraz zdania, które jest negacją alternatywy zdań prostych; – zna takie pojęcia, jak: zbiór pusty, zbiory równe, podzbiór zbioru; – zna symbolikę matematyczną dotyczącą zbiorów ($\in$, $\notin$, $\cup$, $\cap$, $-$, $\subset$, $\not\subset$); – potrafi podać przykłady zbiorów (w tym przykłady zbiorów skończonych oraz nieskończonych); – potrafi określić relację pomiędzy elementem i zbiorem; – potrafi określać relacje pomiędzy zbiorami (równość zbiorów, zawieranie się zbiorów, rozłączność zbiorów); – zna definicję sumy, iloczynu, różnicy zbiorów; – potrafi wyznaczać sumę, iloczyn i różnicę zbiorów skończonych; – potrafi wyznaczyć sumę, różnicę oraz część wspólną podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych: ***N***, ***C***, ***NW***, ***W***; – potrafi rozróżniać liczby naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne; – potrafi przedstawić liczbę wymierną w postaci ułamka zwykłego i w postaci rozwinięcia dziesiętnego; – umie zamienić ułamek o rozwinięciu dziesiętnym nieskończonym okresowym na ułamek zwykły; – potrafi zaznaczać liczby wymierne na osi liczbowej; – rozumie pojęcie przedziału, rozpoznaje przedziały ograniczone i nieograniczone;	zastosować je w działaniach na zbiorach; – potrafi wyznaczyć dopełnienie przedziału lub dopełnienie zbioru liczbowego skończonego w przestrzeni ***R***; – potrafi przeprowadzić proste dowody, w tym dowody „nie wprost”, dotyczące własności liczb rzeczywistych; – potrafi oceniać wartości logiczne zdań, w których występują zależności pomiędzy podzbiorami zbioru ***R***; – potrafi wyznaczyć dziedzinę równania z jedną niewiadomą, w przypadku, gdy trzeba rozwiązać koniunkcję warunków; – potrafi podać przykład równania sprzecznego oraz równania tożsamościowego; – potrafi wskazać przykład nierówności sprzecznej oraz nierówności tożsamościowej; – rozumie zwrot „dla każdego *x* ....” oraz „istnieje takie *x*, że ....” i potrafi stosować te zwroty w budowaniu zdań logicznych; – potrafi ocenić wartość logiczną zdania z kwantyfikatorem.	

– potrafi zapisać za pomocą przedziałów zbiory opisane nierównościami; – potrafi zaznaczyć na osi liczbowej podany przedział liczbowy; – potrafi wyznaczyć sumę, różnicę oraz część wspólną przedziałów; – wie, co to jest równanie (nierówność) z jedną niewiadomą; – potrafi określić dziedzinę równania; – zna definicję rozwiązania równania (nierówności) z jedną niewiadomą; – wie, jakie równanie nazywamy równaniem sprzecznym, a jakie równaniem tożsamościowym; – wie, jaką nierówność nazywamy sprzeczną, a jaką nierównością tożsamościową.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Wśród poniższych wypowiedzi znajdują się zdania logiczne. Wskaż je. Oceń wartości logiczne zdań. 1) Wyjdź do ogrodu! 2) Czy dzisiaj jest klasówka z matematyki? 3) Liczba 3 jest większa od liczby 8. 4) Liczba *a* jest liczbą parzystą. 5) Warszawa jest stolicą Polski. Zadanie 2. Dane jest zdanie: „2 jest liczbą parzystą i liczba 5 nie jest podzielna przez 3”. a) Oceń wartość logiczną zdania. b) Napisz zaprzeczenie zdania; podaj prawo	Zadanie 1. Wiadomo, że poniższe zdania złożone są fałszywe. Co można powiedzieć o zdaniach prostych tworzących dane zdania? a) Ania poszła do Kasi lub Ania poszła do Oli. b) Jeśli Bartek będzie grał w gry komputerowe, to nie pójdzie do kina. Zadanie 2. Oceń wartość logiczną danego twierdzenia. Następnie sformułuj twierdzenie odwrotne do danego i określ, czy jest ono fałszywe, czy prawdziwe. a) Jeśli liczba całkowita jest podzielna przez 3 i przez 7, to liczba ta jest podzielna przez 21.	Zadanie 1. Napisz negację zdania: a) Pojadę na wieś lub zostanę w domu i posprzątam swój pokój. b) Nie wyjdę z domu i obejrzę film lub poczytam książkę. Zadanie 2. Co można powiedzieć o zbiorach A i B, jeśli: a) $A \cap B = B$; b) $A \cup B \subset A$; c) $A - B = A \cap B$? Zadanie 3. Podaj przykład równania z jedną niewiadomą, którego dziedziną jest zbiór: a) $\boldsymbol{R} - \{-3, 0\}$ i które ma tylko dwa rozwiązania:

logiczne, z którego skorzystałeś.

Zadanie 3.
Oceń wartość logiczną zdań:
a) $-3^2 = 9$ b) $1^3 - 2^3 \neq (-1)^3$
c) $3 \cdot (1 - 8) \leq -3 \cdot (8 - 1)$

Zadanie 4.
a) Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $C \cap D$, $A - C$, jeśli:
$A = \{-3, -2, -1, 3, 4\}$, $B = \{-2, 0, 1, 3\}$,
$C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
b) Wykonaj działania na zbiorach:
$\boldsymbol{C} - \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{W} \cup \boldsymbol{NW}$, $\boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{R}$.
c) Wykonaj działania na przedziałach:
$(2, 5) \cup \langle 3, 8\rangle$; $(-\infty, 3) - (0, 9\rangle$;
$(-7, 8\rangle \cap \langle -7, +\infty)$.

Zadanie 5.
Przedstaw liczbę 2,3(04) w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Czy dana liczba jest wymierna czy niewymierna?

Zadanie 6.
Dane jest równanie z niewiadomą x:
$x - \sqrt{3} = 3$.
a) Podaj dziedzinę tego równania.
b) Jaka liczba spełnia to równanie?

b) Jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 3 i przez 6, to liczba ta jest podzielna przez 18.

Zadanie 3.
Zbiór $A \cup B$ ma 7 elementów, zbiór B ma 4 elementy, zaś zbiór A ma 5 elementów. Ile elementów ma zbiór $A \cap B$?

Zadanie 4
Wiedząc, że π jest liczbą niewymierną, wykaż, że liczba $2\pi - 1$ też jest liczbą niewymierną.

Zadanie 5.
a) Wyznacz zbiory:
$(-3, 2\rangle \cap \boldsymbol{N}$; $\boldsymbol{C} - (5, +\infty)$; $\boldsymbol{C}_+ \cup \langle 4, +\infty)$;
$(2, 5) - \boldsymbol{N}$.
b) Znajdź dopełnienie danego zbioru
w przestrzeni $\boldsymbol{R}$: $A = \langle -7, +\infty)$; $B = \{-4, 3, 5\}$,
$C = (2, 8) \cup \{0\}$.

Zadanie 6.
Podaj przykład równania:
a) którego zbiór rozwiązań jest jednoelementowy;
b) którego zbiór rozwiązań jest dwuelementowy;
c) które jest sprzeczne;
d) które jest tożsamościowe.

Zadanie 7.
Dana jest równanie z niewiadomą x:
$(x - 3)(x + 2) = 0$.
a) Określ dziedzinę równania.
b) Podaj zbiór rozwiązań równania.

2, 3;
b) $\langle 2, +\infty)$ i które ma tylko jedno rozwiązanie 2.

Zadanie 4.
Określ wartość logiczną zdania i podaj jego zaprzeczenie:
a) $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{N}} (x + 2 > 0 \wedge x < 1000)$;
b) $\bigvee_{x \in \boldsymbol{C}_+} \left(\frac{x}{2} > 1 \vee x \leq 0 \right)$.

	Zadanie 7. Oceń wartość logiczną zdania: „Dla dowolnej liczby rzeczywistej *x* prawdziwa jest nierówność: $x^2>0$”.	

2. Działania w zbiorach liczbowych

Tematyka zajęć:

- Zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb całkowitych
- Zbiór liczb wymiernych i zbiór liczb niewymiernych
- Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych
- Rozwiązywanie równań – metoda równań równoważnych
- Rozwiązywanie nierówności – metoda nierówności równoważnych
- Procenty
- Punkty procentowe
- Wartość bezwzględna. Proste równania i nierówności z wartością bezwzględną
- Przybliżenia, błąd bezwzględny i błąd względny, szacowanie

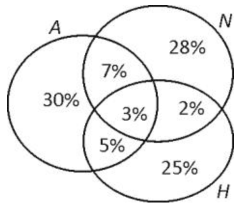
Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi wskazać liczby pierwsze i liczby złożone; – zna i potrafi stosować cechy podzielności liczb naturalnych (przez 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10); – potrafi rozłożyć liczbę naturalną na czynniki pierwsze; – potrafi wyznaczyć największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb naturalnych; – potrafi wykonać dzielenie z resztą w zbiorze liczb naturalnych; – zna definicję liczby całkowitej parzystej oraz nieparzystej; – potrafi sprawnie wykonywać działania na ułamkach zwykłych i na ułamkach dziesiętnych; – zna i stosuje w obliczeniach kolejność działań i prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych; – potrafi porównywać liczby rzeczywiste; – zna własność proporcji i potrafi stosować ją do	Uczeń: – zna i stosuje w obliczeniach zależność dotyczącą liczb naturalnych różnych od zera: $NWD(a, b) \cdot NWW(a, b) = a \cdot b$; – potrafi podać zapis symboliczny wybranych liczb, np. liczby parzystej, liczby nieparzystej, liczby podzielnej przez daną liczbę całkowitą, wielokrotności danej liczby; zapis liczby, która w wyniku dzielenia przez daną liczbę naturalną daje wskazaną resztę; – potrafi zapisać symbolicznie zbiór na podstawie informacji o jego elementach; – potrafi wymienić elementy zbioru zapisanego symbolicznie; – potrafi wykazać podzielność liczb całkowitych, zapisanych symbolicznie; – umie podać część całkowitą każdej liczby rzeczywistej i część ułamkową liczby wymiernej; - wie, kiedy dwa równania (dwie nierówności) są	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe o podwyższonym stopniu trudności, dotyczące własności liczb rzeczywistych; – potrafi wykonać dzielenie z resztą w zbiorze liczb całkowitych ujemnych; – potrafi rozwiązać równania z wartością bezwzględną typu: $\|y\| + \|z\| = 0$.

rozwiązywania równań zawierających proporcje; – zna twierdzenia pozwalające przekształcać w sposób równoważny równania i nierówności; – potrafi rozwiązywać równania z jedną niewiadomą metodą równań równoważnych; – potrafi rozwiązywać nierówności z jedną niewiadomą metodą nierówności równoważnych; – potrafi obliczyć procent danej liczby, a także wyznaczyć liczbę, gdy dany jest jej procent; – potrafi obliczyć, jakim procentem danej liczby jest druga dana liczba; – potrafi określić, o ile procent dana wielkość jest większa (mniejsza) od innej wielkości; – potrafi posługiwać się procentem w prostych zadaniach tekstowych (w tym wzrosty i spadki cen, podatki, kredyty i lokaty); – rozumie pojęcie punktu procentowego i potrafi się nim posługiwać; – potrafi odczytywać dane w postaci tabel i diagramów, a także przedstawiać dane w postaci diagramów procentowych; – potrafi odczytywać dane przedstawione w tabeli lub na diagramie i przeprowadzać analizę procentową przedstawionych danych; – zna definicję wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej i jej interpretację geometryczną; – potrafi obliczyć wartość bezwzględną liczby; – umie zapisać i obliczyć odległość na osi liczbowej między dwoma dowolnymi punktami; – potrafi wyznaczyć przybliżenie dziesiętne liczby rzeczywistej z żądaną dokładnością; – potrafi obliczyć błąd bezwzględny i błąd względny danego przybliżenia;	równoważne i potrafi wskazać równania (nierówności) równoważne; – potrafi rozwiązać proste równania wymierne typu $\frac{2}{x+7}=\frac{1}{4}$; $\frac{x-5}{x-2}=0$ – rozumie zmiany bankowych stóp procentowych i umie wyrażać je w punktach procentowych (oraz bazowych); – potrafi zaznaczyć na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności z wartością bezwzględną typu: $\lvert x-a \rvert = b$, $\lvert x-a \rvert < b$, $\lvert x-a \rvert > b$, $\lvert x-a \rvert \le b$, $\lvert x-a \rvert \ge b$ – potrafi na podstawie zbioru rozwiązań nierówności z wartością bezwzględną zapisać tę nierówność; – potrafi oszacować wartość liczby niewymiernej.	

– potrafi obliczyć błąd procentowy przybliżenia; – potrafi szacować wartości wyrażeń.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Bartek i Jurek postanowili zmierzyć odległość namiotu od przystani za pomocą swoich kroków. Bartek stawia kroki o długości 48 cm, natomiast Jurek o długości 56 cm. W jakiej odległości od namiotu znajduje się przystań, jeśli ślady stóp chłopców pokryły się 15 razy? Wynik wyraź w metrach. Zadanie 2. Znajdź liczbę wymierną, która znajduje się na osi liczbowej między liczbami: a) $\frac{1}{8}$ i $\frac{1}{6}$; b) $\frac{5}{7}$ i $\frac{6}{7}$; c) $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$. Zadanie 3. a) Rozwiąż nierówność: $\frac{x-2}{3}-\frac{x+5}{2}>5-x$ b) Podaj najmniejszą liczbę pierwszą spełniającą tę nierówność. Zadanie 4. Jabłka zdrożały o 20% i wówczas cena jednego kilograma jabłek wynosiła 4,80 zł. O ile procent cena jabłek przed podwyżką była niższa niż po podwyżce? Zadanie 5.	Zadanie 1. Wyznacz zbiory $(A \cap B) - D$, $A \cup B$, $(A - B) - D$, jeśli: $A = \{x: x \in \boldsymbol{C} \text{ i } x \in \langle -3, 4)\}$, $B = (-1, 2\rangle$, $D = \{x : x \in \boldsymbol{R} \text{ i } \lvert x - 2\rvert = 4\}$ Zadanie 2. Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3. Zadanie 3. Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej, rozwiąż równanie: $\lvert x + 3{,}5\rvert = 5$. a) Podaj najmniejszą liczbę pierwszą, która jest większa od rozwiązań tego równania. b) Wyznacz odwrotność liczby $\frac{\lvert a-b\rvert}{4}$, gdzie a, b są rozwiązaniami danego równania. Zadanie 4. a) Oblicz: $\lvert 2 - 3\sqrt{3}\rvert$. b) Rozwiąż nierówność: $\lvert x + 3\rvert \geq 4$. c) Przedział liczbowy $(-5, 7)$ jest zbiorem rozwiązań pewnej nierówności z wartością bezwzględną. Zapisz tę nierówność. Zadanie 5. Sprawdź (nie używając kalkulatora), czy liczba	Zadanie 1. Iloczyn dwóch liczb naturalnych dodatnich wynosi 1728, a największy ich wspólny dzielnik równa się 24. Znajdź te liczby. Zadanie 2. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych, spełniających równanie: $x - y = xy$. Zadanie 3. Wykaż, że reszta z dzielenia przez 3 sumy kwadratów trzech dowolnych kolejnych liczb naturalnych wynosi 2. Zadanie 4. Rozwiąż: a) równanie $\lvert x + 1\rvert + \lvert x^2 - 1\rvert = 0$ b) nierówność $\lvert 2 - x\rvert + \lvert x \cdot (x - 2)\rvert \leq 0$.

Uczestnicy obozu językowego posługiwali się trzema językami obcymi: angielskim (*A*), hiszpańskim (*H*) i niemieckim (*N*), zgodnie z następującym podziałem procentowym:  a) Jaki procent wszystkich uczestników obozu znało język angielski? b) Jaki procent osób znających język niemiecki znało również pozostałe dwa języki? c) O ile punktów procentowych więcej było na obozie osób ze znajomością tylko języka angielskiego od osób, które znały tylko język hiszpański? d) O ile procent mniej było na obozie uczniów, którzy znali tylko język hiszpański od uczniów, którzy znali język angielski lub niemiecki? <u>Zadanie 6.</u> a) Porównaj liczby: $a = \left\| \frac{\sqrt{5}}{5} - 1 \right\|$ oraz $b = \|-1{,}5\|$; b) Oblicz odległość między liczbami –6 i 12; c) Rozwiąż równanie $\|x\| = 3$ i nierówność $\|x\| < 5$. <u>Zadanie 7.</u> Na zawodach w skokach narciarskich komentator sportowy ocenił pierwszy skok zawodnika na 122 m, podczas gdy skoczek osiągnął długość	$\frac{2\sqrt{5}-1}{5}$ należy do przedziału $\left(\frac{3}{5}, 1\right)$.	

skoku równą 124,5 m. Drugi skok miał długość 123,5 m, zaś komentator ocenił go na 126 m. W którym przypadku komentator popełnił większy błąd?		

3. Wyrażenia algebraiczne

Tematyka zajęć:
- Potęga o wykładniku naturalnym
- Pierwiastek arytmetyczny. Pierwiastek stopnia nieparzystego z liczby ujemnej
- Działania na wyrażeniach algebraicznych
- Wzory skróconego mnożenia
- Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym
- Potęga o wykładniku wymiernym
- Potęga o wykładniku rzeczywistym
- Dowodzenie twierdzeń
- Określenie logarytmu
- Zastosowanie logarytmów
- Przekształcanie wzorów
- Średnie

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi wykonywać działania na potęgach o wykładniku naturalnym, całkowitym i wymiernym; – zna prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i stosuje je w obliczeniach; – potrafi zapisać liczbę w notacji wykładniczej; – sprawnie sprowadza wyrażenia algebraiczne do najprostszej postaci i oblicza ich wartości dla podanych wartości zmiennych; – potrafi wyłączać wspólny czynnik z różnych wyrażeń; – potrafi sprawnie posługiwać się wzorami skróconego mnożenia: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	Uczeń: – sprawnie przekształca wyrażenia algebraiczne zawierające potęgi i pierwiastki; – sprawnie zamienia pierwiastki arytmetyczne na potęgi o wykładniku wymiernym i odwrotnie; – sprawnie wykonywać działania na potęgach o wykładniku rzeczywistym; – potrafi wyłączać wspólną potęgę poza nawias; – potrafi rozłożyć wyrażenia na czynniki metodą grupowania wyrazów lub za pomocą wzorów skróconego mnożenia; – potrafi oszacować wartość potęgi o wykładniku rzeczywistym; – potrafi dowodzić twierdzenia, posługując się dowodem wprost;	Uczeń: – potrafi sprawnie działać na wyrażeniach zawierających potęgi i pierwiastki z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia; – potrafi sprawnie rozkładać wyrażenia zawierające potęgi i pierwiastki na czynniki, stosując jednocześnie wzory skróconego mnożenia i metodę grupowania wyrazów; – potrafi wykorzystać pojęcie logarytmu (a także cechy i mantysy logarytmu dziesiętnego) w zadaniach praktycznych.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ i sprawnie wykonuje działania na wyrażeniach, które zawierają wymienione wzory skróconego mnożenia; – potrafi usuwać niewymierność z mianownika ułamka, stosując wzór skróconego mnożenia (różnicę kwadratów dwóch wyrażeń); – zna pojęcie pierwiastka arytmetycznego z liczby nieujemnej i potrafi stosować prawa działań na pierwiastkach w obliczeniach; – potrafi obliczać pierwiastki stopnia nieparzystego z liczb ujemnych; – potrafi dowodzić proste twierdzenia; – zna definicję logarytmu i potrafi obliczać logarytmy bezpośrednio z definicji; – sprawnie przekształca wzory matematyczne, fizyczne i chemiczne; – zna pojęcie średniej arytmetycznej, średniej ważonej i średniej geometrycznej liczb oraz potrafi obliczyć te średnie dla podanych liczb.	– potrafi dowodzić twierdzenia, posługując się dowodem nie wprost; – zna i potrafi stosować własności logarytmów w obliczeniach; – stosuje średnią arytmetyczną, średnią ważoną i średnią geometryczną w zadaniach tekstowych.	

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Oblicz wartość wyrażenia: $8^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2} + \left(\frac{1}{9^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \left(27^{-\frac{2}{3}}\right) + \sqrt[3]{-64}$ <u>Zadanie 2.</u> Usuń niewymierność z mianownika ułamka: a) $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{8}-4}{2-\sqrt{2}}$	<u>Zadanie 1.</u> Sprowadź wyrażenie: $[y^3 : (y^2 \cdot y^{-3})]^4 : \left[\left(\frac{1}{y}\right)^4 \cdot \frac{1}{y^{-2}}\right]^{-3}$ do najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla $y = \sqrt{2\sqrt{2}}$. <u>Zadanie 2.</u> Wykaż, że liczba $6^{20} + 3 \cdot 6^{19} - 4 \cdot 6^{18}$ jest podzielna przez 5.	<u>Zadanie 1.</u> Oblicz wartość wyrażenia: $\left[\left(4-12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(4+12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$ <u>Zadanie 2.</u> Wykaż, że liczba $\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt[4]{4}$ jest całkowita.

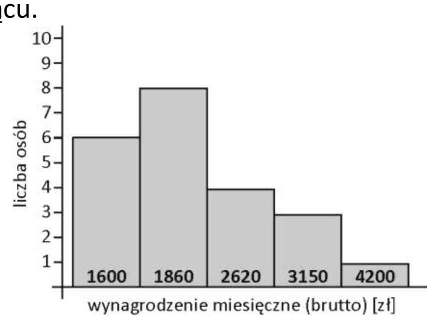
Zadanie 3.
Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:
a) $(a - b) - (a - b)^2$
b) $(b - a)xy + (a - b)xyz - (b - a)z^2$

Zadanie 4.
Wykaż, że jeśli a i b są liczbami dodatnimi to $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Zadanie 5.
Oblicz: $3\log(\log_2 32 \cdot \log_5 25)$.

Zadanie 6.
Wyznacz podaną wielkość ze wzoru:
a) $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; f b) $P = 2\pi r(r + h)$; h

Zadanie 7.
Poniższy diagram przedstawia wynagrodzenie brutto pracowników pewnej firmy w tym miesiącu.



a) Oblicz średnie wynagrodzenie brutto w tej firmie.
b) Podaj, jaki procent pracowników zarabia

Zadanie 3.
Oblicz (bez użycia kalkulatora) przybliżoną wartość potęgi: $0{,}0001^{-\sqrt{5}}$, jeśli $\sqrt{5} \approx 2{,}25$.

Zadanie 4.
Wykaż, że jeśli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 5$, to $a^4 + b^4 = 17$.

Zadanie 5.
Wykaż, stosując dowód nie wprost, że jeśli liczby a i b są dodatnie, to $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$.

Zadanie 6.
Niech $\log 2 = a$ i $\log 3 = b$. Wyraź za pomocą a i b wyrażenie: $\log 8 \cdot \log_8 6$.

Zadanie 7.
Na wycieczkę w góry pojechało 21 osób o średniej wieku 23 lata. Średnia ta wzrosła do 24 lat, po doliczeniu wieku przewodnika, który dołączył do wycieczki w Zakopanem. Ile lat miał przewodnik?

Zadanie 3.
Rozłóż na czynniki wyrażenia:
a) $x^4 + 1$
b) $x^6 - 2x^4 - 2x^2 + 4$

Zadanie 4.
Oblicz wartość pH kwasu solnego, wiedząc, że stężenie jonów wodorowych w tym kwasie jest równe 0,05 mol/dm^3. Wynik podaj w przybliżeniu dziesiętnym, z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

więcej, niż wynosi średnie wynagrodzenie w tej firmie. c) Od przyszłego miesiąca każdy pracownik ma zarabiać o 100 zł więcej, niż w tym miesiącu. Oblicz średni procent, o jaki planowany jest wzrost wynagrodzeń w tej firmie. Wyniki podaj w przybliżeniu dziesiętnym, z dokładnością do 0,1%.		

4. Geometria płaska – pojęcia wstępne

Tematyka zajęć:

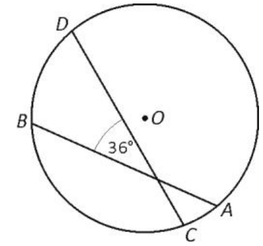
- Punkt, prosta, odcinek, półprosta, kąt, figura wypukła, figura ograniczona
- Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie, odległość punktu od prostej, odległość między prostymi równoległymi, symetralna odcinka, dwusieczna kąta
- Dwie proste przecięte trzecią prostą
- Twierdzenie Talesa
- Okrąg i koło
- Kąty i koła

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna figury podstawowe (punkt, prosta, płaszczyzna, przestrzeń) i potrafi zapisać relacje między nimi; – zna pojęcie figury wypukłej i wklęsłej; potrafi podać przykłady takich figur; – zna pojęcie figury ograniczonej i figury nieograniczonej, potrafi podać przykłady takich figur; – umie określić położenie prostych na płaszczyźnie; – rozumie pojęcie odległości, umie wyznaczyć odległość dwóch punktów, punktu od prostej, dwóch prostych równoległych; – zna określenie kąta i podział kątów ze względu na ich miarę; – zna pojęcie kątów przyległych i kątów wierzchołkowych oraz potrafi zastosować własności tych kątów w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna pojęcie dwusiecznej kąta i symetralnej	Uczeń: – potrafi zapisać miarę stopniową kąta, używając minut i sekund; – potrafi udowodnić twierdzenie dotyczące sumy miar kątów w trójkącie (czworokącie); – potrafi skonstruować styczną do okręgu, przechodzącą przez punkt leżący w odległości większej od środka okręgu niż długość promienia okręgu; potrafi skonstruować styczną do okręgu przechodzącą przez punkt leżący na okręgu; – wie, co to jest kąt dopisany do okręgu; zna twierdzenie o kątach wpisanym i dopisanym do okręgu, opartych na tym samym łuku; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów, stycznych, kątów środkowych, wpisanych i dopisanych, z zastosowaniem poznanych twierdzeń; – potrafi rozwiązywać zadania złożone, wymagające wykorzystania równocześnie kilku poznanych własności.	– Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące odcinków, prostych, półprostych, kątów i kół, w tym z zastosowaniem poznanych twierdzeń; – zna i potrafi udowodnić twierdzenie o dwusiecznych kątów przyległych; – umie udowodnić twierdzenia o kątach środkowych i wpisanych w koło; – umie udowodnić twierdzenie o kącie dopisanym do okręgu; – umie udowodnić własności figur geometrycznych w oparciu o poznane twierdzenia.

odcinka, potrafi zastosować własność dwusiecznej kąta oraz symetralnej odcinka w rozwiązywaniu prostych zadań, – umie skonstruować dwusieczną danego kąta i symetralną danego odcinka; – zna własności kątów utworzonych między dwiema prostymi równoległymi, przeciętymi trzecią prostą i umie zastosować je w rozwiązywaniu prostych zadań; potrafi uzasadnić równoległość dwóch prostych, znajdując równe kąty odpowiadające; – zna twierdzenie Talesa; potrafi je stosować do podziału odcinka w danym stosunku, do konstrukcji odcinka o danej długości, do obliczania długości odcinka w prostych zadaniach; – zna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa i potrafi je stosować do uzasadnienia równoległości odpowiednich odcinków lub prostych; – zna wnioski z twierdzenia Talesa i potrafi je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna definicję koła i okręgu, poprawnie posługuje się terminami: promień, środek okręgu, cięciwa, średnica, łuk okręgu; – potrafi określić wzajemne położenie prostej i okręgu; – zna definicję stycznej do okręgu; – zna twierdzenie o stycznej do okręgu i potrafi je wykorzystywać przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie o odcinkach stycznych i potrafi je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – umie określić wzajemne położenie dwóch		

okręgów; – posługuje się terminami: kąt wpisany w koło, kąt środkowy koła; zna twierdzenia dotyczące kątów wpisanych i środkowych i umie je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Punkt *C* dzieli odcinek *AB* długości 24 cm na dwa odcinki, których stosunek długości jest równy 6 : 2. Jaka jest długość każdego z odcinków? <u>Zadanie 2.</u> Różnica miar dwóch kątów przyległych wynosi 21°. Oblicz miary tych kątów. <u>Zadanie 3.</u> Na płaszczyźnie dane są punkty: *A*, *B*, *P*, *Q*, przy czym $A \neq B$, $\|AP\| = \sqrt{12}$ cm, $\|BP\| = 3\sqrt{2}$ cm, $\|AQ\| = \frac{49}{9}$ cm, $\|BQ\| = 5{,}(4)$ cm. Sprawdź, czy punkty *P*, *Q* należą do symetralnej odcinka *AB*. Z jakiej własności symetralnej skorzystasz? <u>Zadanie 4.</u> Dany jest odcinek długości *a*. Podziel ten odcinek: a) na 5 odcinków równej długości; b) w stosunku 2 : 7. <u>Zadanie 5.</u> W trapezie *ABCD*, $AB \parallel CD$, mamy dane: $\|AB\| = 12$ cm, $\|CD\| = 7$ cm, $\|AD\| = 8$ cm. O ile	<u>Zadanie 1.</u> Długości odcinków *AB*, *AC*, *BC*, *BD* i *CD* spełniają warunki: $\|AB\| = \|AC\| + \|BC\|$ oraz $\|BC\| + \|BD\| = \|CD\|$. Wykaż, że punkty *A*, *B*, *C*, *D* leżą na jednej prostej. <u>Zadanie 2.</u> Kąty *AOC* i *BOD* są kątami wierzchołkowymi. Wykaż, że przedłużenie dwusiecznej kąta *AOC* jest dwusieczną kąta *BOD*. <u>Zadanie 3.</u> W trójkącie *ABC* poprowadzono trzy proste równoległe do podstawy *AB*, dzielące bok *BC* na cztery odcinki równej długości. Suma długości odcinków tych prostych zawartych w trójkącie *ABC* jest o 6 dm większa od długości podstawy *AB*. Oblicz $\|AB\|$. <u>Zadanie 4.</u> Prosta *k* jest styczna do okręgu. Oblicz miarę kąta α dopisanego do okręgu:	<u>Zadanie 1.</u> Cięciwy *AB* i *CD* przecinają się pod kątem 36°. Wyznacz kąty środkowe, odpowiadające łukom *AC* i *BD*, jeżeli stosunek ich długości wynosi 1 : 3.  <u>Zadanie 2.</u> Do danego okręgu poprowadzono styczną tak, że końce *A* i *B* średnicy *AB* tego okręgu są odległe od stycznej o 25 cm i 15 cm. Oblicz długość średnicy *AB*. <u>Zadanie 3.</u> Wykaż, że prawdziwe jest twierdzenie: Jeśli istnieje okrąg, który jest styczny do wszystkich boków czworokąta wypukłego, to sumy długości dwóch przeciwległych boków tego czworokąta są sobie równe. <u>Zadanie 4.</u>

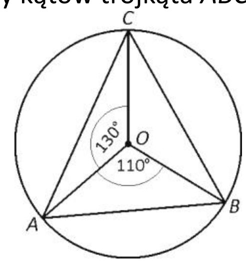
należy wydłużyć ramię *AD*, aby przecięło się z przedłużeniem ramienia *BC*?

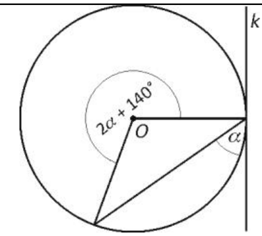
Zadanie 6.

Miara kąta utworzonego przez dwa promienie okręgu wynosi 146°. Oblicz miarę kąta, który tworzą styczne poprowadzone przez końce tych promieni.

Zadanie 7.

Wyznacz miary kątów trójkąta *ABC*.





Zadanie 5.

Dane są dwa okręgi $o(A, r_1)$, $o(B, r_2)$ takie, że $r_1 = 3k + 1$, $r_2 = 2k + 3$, $|AB| = 6k - 3$. Określ położenie okręgów, w zależności od parametru k.

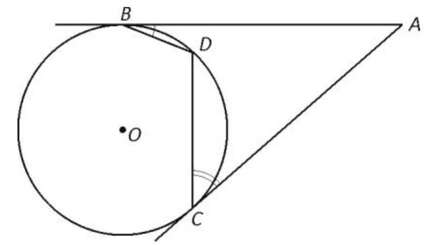
Zadanie 6.

Z punktu zewnętrznego *A* poprowadzono styczne *AB* i *AC* do okręgu o środku w punkcie *O* (*B*, *C* – punkty styczności). Wykaż, że jeśli miara kąta między stycznymi równa się mierze kąta zawartego między promieniami poprowadzonymi ze środka koła do punktów styczności, to czworokąt *ABOC* jest kwadratem.

Wykaż, że jeśli przez wszystkie wierzchołki czworokąta wypukłego można poprowadzić okrąg, to sumy miar przeciwległych kątów czworokąta są równe 180°.

Zadanie 5.

Punkt *D* leży na łuku *BC* wewnątrz trójkąta *ABC*. Wykaż, że suma $|\angle ABD| + |\angle ACD|$ jest stała (tzn. nie zależy od położenia punktu *D* na łuku *BC*). Czy teza zadania będzie prawdziwa, jeśli punkt *D* będzie leżał na łuku *BC* na zewnątrz trójkąta *ABC*?



5. Geometria płaska – trójkąty

Tematyka zajęć:

- Podział trójkątów. Suma kątów w trójkącie. Nierówność trójkąta. Odcinek łączący środki dwóch boków w trójkącie
- Twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa
- Wysokości w trójkącie. Środkowe w trójkącie
- Symetralne boków trójkąta. Okrąg opisany na trójkącie
- Dwusieczne kątów trójkąta. Okrąg wpisany w trójkąt
- Przystawanie trójkątów
- Podobieństwo trójkątów

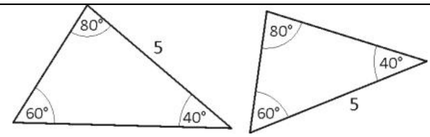
Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna podział trójkątów ze względu na boki i kąty; – wie, ile wynosi suma miar kątów w trójkącie i w czworokącie; – zna warunek na długość odcinków, z których można zbudować trójkąt; – zna twierdzenie dotyczące odcinka łączącego środki dwóch boków trójkąta i potrafi je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie Pitagorasa i umie je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i wykorzystuje je do sprawdzenia, czy dany trójkąt jest prostokątny; – umie określić na podstawie długości boków trójkąta, czy trójkąt jest ostrokątny, czy rozwartokątny; – umie narysować wysokości w trójkącie i wie, że wysokości (lub ich przedłużenia) przecinają się w jednym punkcie;	Uczeń: – zna zależności między bokami w trójkącie (nierówności trójkąta) i stosuje je przy rozwiązywaniu zadań; – potrafi udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie; – zna i umie zastosować w zadaniach własność wysokości w trójkącie prostokątnym, poprowadzonej na przeciwprostokątną; – potrafi obliczyć długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny i długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym, mając dane długości boków trójkąta; – potrafi udowodnić proste własności trójkątów, wykorzystując cechy przystawania trójkątów; – potrafi uzasadnić, że symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny równoodległych od końców odcinka; – potrafi uzasadnić, że każdy punkt należący do dwusiecznej kąta leży w równej odległości od	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, dotyczących trójkątów, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń; – potrafi udowodnić twierdzenie o środkowych w trójkącie; – potrafi udowodnić twierdzenie dotyczące wysokości w trójkącie prostokątnym, poprowadzonej na przeciwprostokątną.

– zna twierdzenie o środkowych w trójkącie oraz potrafi je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna pojęcie środka ciężkości trójkąta; – zna twierdzenie o symetralnych boków w trójkącie; – wie, że punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie i potrafi skonstruować ten okrąg; – zna twierdzenie o dwusiecznych kątów w trójkącie; – wie, że punkt przecięcia się dwusiecznych kątów w trójkącie jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt i potrafi skonstruować ten okrąg; – zna i stosuje przy rozwiązywaniu prostych zadań własności trójkąta równobocznego: długość wysokości w zależności od długości boku, długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt; –zna i stosuje własności trójkąta prostokątnego: suma miar kątów ostrych trójkąta, długość wysokości w trójkącie prostokątnym równoramiennym w zależności od długości przyprostokątnej; długość promienia okręgu opisanego na trójkącie i długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt w zależności od długości boków trójkąta, zależność między długością środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego a długością przeciwprostokątnej; – zna podstawowe własności trójkąta równoramiennego i stosuje je przy	ramion tego kąta; – potrafi udowodnić twierdzenie o symetralnych boków i twierdzenie o dwusiecznych kątów w trójkącie; – umie udowodnić twierdzenie o odcinkach stycznych; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów wpisanych w trójkąt i okręgów opisanych na trójkącie; – potrafi stosować cechy podobieństwa trójkątów do rozwiązania zadań z wykorzystaniem innych, wcześniej poznanych własności; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące trójkątów, z zastosowaniem poznanych do tej pory twierdzeń.	

rozwiązywaniu prostych zadań; – zna trzy cechy przystawania trójkątów i potrafi je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna cechy podobieństwa trójkątów; potrafi je stosować do rozpoznawania trójkątów podobnych i przy rozwiązaniach prostych zadań; – umie obliczyć skalę podobieństwa trójkątów podobnych.		

Przykładowe zadania

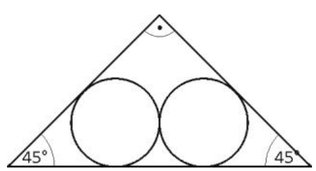
<u>Zadanie 1.</u> W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie jest dwa razy większy niż kąt przy wierzchołku. Wyznacz kąty tego trójkąta. <u>Zadanie 2.</u> Wielkość telewizora wyraża się długością przekątnej ekranu mierzonej w calach (1 cal = = 2,54 cm). Oblicz, ile cali ma telewizor, którego wymiary ekranu wynoszą 42 cm na 31,5 cm. Wynik podaj z dokładnością do 1 cala. <u>Zadanie 3.</u> Dane są odcinki długości *a*, *b* oraz *c*. Skonstruuj odcinek długości: $\frac{\sqrt{3}ac}{\sqrt{2}b}$. <u>Zadanie 4.</u> Czy poniższe trójkąty są przystające? Odpowiedź uzasadnij.	<u>Zadanie 1.</u> Dwa boki trójkąta mają długość 1 cm i 4 cm. Oblicz obwód tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że długość trzeciego boku wyraża się liczbą naturalną. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie prostokątnym *ABC* przedłużono przeciwprostokątną *AB* i obrano na przedłużeniach punkty *D* i *E* tak, że $\|AD\| = \|AC\|$ oraz $\|BE\| = \|BC\|$. Oblicz miarę kąta *DCE*. <u>Zadanie 3.</u> W trójkącie boki mają długość: 17 cm, 25 cm, 28 cm. a) Sprawdź, czy ten trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny. b) Oblicz długość wysokości poprowadzonej na najdłuższy bok. c) Podaj długość odcinków, na jakie spodek wysokości podzielił najdłuższy bok trójkąta.	<u>Zadanie 1.</u> Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu płaszczyzny od wierzchołków czworokąta jest większa od połowy obwodu tego czworokąta. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest równa odcinkowi, który łączy środek podstawy ze środkiem ramienia. Podstawa trójkąta ma długość *a*. Jaką długość ma wysokość opuszczona na podstawę? <u>Zadanie 3.</u> Niech *a*, *b*, *c* będą długościami boków w dowolnym trójkącie. Wykaż, że prawdziwa jest nierówność: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$. <u>Zadanie 4.</u> Dany jest trójkąt *ABC*, w którym $\|AB\| = \|AC\|$ oraz $\|\angle ABC\| = 3\|\angle BAC\|$. Wykaż, że jeżeli półproste $\overrightarrow{BK}$ i $\overrightarrow{BL}$ dzielą kąt $\angle ABC$ na



Zadanie 5.
W trójkącie *ABC* dane są długości boków:
$|AB| = 12$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 10$ cm. Punkt *D* dzieli bok *AB* na takie dwa odcinki, że $|AD| : |DB| = 3 : 5$. Przez punkt *D* poprowadzono prostą równoległą do boku *AC*, która przecięła bok *BC* w punkcie *E*. Oblicz długości odcinków: *CE*, *BE* i *DE*.

Zadanie 6.
W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość 4 cm. Spodek tej wysokości leży w odległości $1\frac{1}{6}$ cm od środka okręgu opisanego na trójkącie. Oblicz:
a) długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie;
b) długość boków tego trójkąta.

Zadanie 7.
W trójkąt prostokątny równoramienny wpisano dwa okręgi, styczne zewnętrznie do siebie, każdy o promieniu 1 cm (jak na rysunku poniżej).



Oblicz obwód tego trójkąta.

Zadanie 4.
Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym dwusieczne kątów przy podstawie są równej długości.

Zadanie 5.
W trójkącie prostokątnym *ABC* przyprostokątne mają długość: $|AB| = 32$ cm, $|AC| = 24$ cm. Symetralna boku *BC* przecina ten bok w punkcie *D*, bok *AB* w punkcie *E* i przedłużenie boku *AC* w punkcie *F*. Udowodnij, że trójkąt *EBD* jest podobny do trójkąta *EAF* i oblicz skalę tego podobieństwa.

Zadanie 6.
Dany jest trójkąt równoboczny *ABC*. Punkty *P*, *Q*, *R* leżą na bokach trójkąta *ABC* (po jednym na każdym boku) w taki sposób, że każdy bok trójkąta *PQR* jest prostopadły do jednego boku trójkąta *ABC*.
a) Wykaż, że trójkąt *PQR* jest równoboczny.
b) Wyznacz stosunek $\frac{|AB|}{|PQ|}$.

trzy równe części ($|\angle LBC| = \frac{1}{3}|\angle ABC|$), to trójkąty *BCL*, *BCK*, *BKA* są równoramienne.

Zadanie 5.
Okręgi o promieniach długości 2 cm i 3 cm są styczne zewnętrznie w punkcie *A*. Znajdź odległość punktu *A* od prostej, do której nie należy punkt *A*, a która jest styczna jednocześnie do obu okręgów.

6. Trygonometria kąta wypukłego

Tematyka zajęć:

- Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa w trójkącie prostokątnym
- Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dla kątów 30°, 45°, 60°
- Sinus, cosinus, tangens i cotangens dowolnego kąta wypukłego
- Podstawowe tożsamości trygonometryczne
- Wybrane wzory redukcyjne
- Trygonometria – zadania różne

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o danych długościach boków; – potrafi korzystać z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora); – zna wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach 30°, 45°, 60°; – potrafi rozwiązywać trójkąty prostokątne; – potrafi obliczać wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne kątów o miarach 30°, 45°, 60°; – zna definicje sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dowolnego kata wypukłego; – potrafi wyznaczyć (korzystając z definicji) wartości funkcji trygonometrycznych takich kątów wypukłych, jak: 120°,135°, 150°; – zna znaki funkcji trygonometrycznych kątów wypukłych, różnych od 90°; zna wartości funkcji trygonometrycznych (o ile istnieją) kątów o miarach: 0°, 90°, 180°;	Uczeń: – potrafi dowodzić różne tożsamości trygonometryczne; – potrafi wykorzystać kilka zależności trygonometrycznych w rozwiązaniu zadania; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności, wykorzystując także wcześniej poznaną wiedzę o figurach geometrycznych.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, wymagające niekonwencjonalnych pomysłów i metod.

– potrafi obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta wypukłego, gdy dana jest jedna z nich; – zna i potrafi stosować podstawowe tożsamości trygonometryczne (w odniesieniu do kąta wypukłego): $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\text{tg}\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\text{tg}\ \alpha \cdot \text{ctg}\ \alpha = 1$; – zna wzory redukcyjne dla kąta $90°- \alpha$, $90°+ \alpha$ oraz $180°- \alpha$; – potrafi stosować poznane wzory redukcyjne w obliczaniu wartości wyrażeń; – potrafi zastosować poznane wzory redukcyjne w zadaniach geometrycznych; – potrafi zbudować kąt wypukły znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych tego kąta.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Oblicz wartość wyrażenia: $\sin 30° \cdot \cos 60° + \text{tg}\ 45° \cdot \text{ctg}\ 30°$. Zadanie 2. W trójkącie prostokątnym *ABC* dane są: długość przeciwprostokątnej $\|BC\| = \sqrt{146}$ cm oraz długość przyprostokątnej $\|AB\| = 5$ cm. a) Oblicz długość drugiej przyprostokątnej. b) Oblicz miary kątów ostrych trójkąta (skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych). c) Oblicz długość wysokości trójkąta poprowadzonej na przeciwprostokątną oraz cosinus kąta, jaki tworzy ta wysokość z krótszą przyprostokątną.	Zadanie 1. Zbuduj kąt o mierze α, $\alpha \in (0°, 180°)$ takiej, że a) $\sin\ \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ b) $\text{tg}\ \alpha = -\sqrt{7}$. Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α. Zadanie 2. Posługując się wzorem $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, oblicz $\sin 15°$. Zadanie 3. W trójkącie prostokątnym *a*, *b* oznaczają długości przyprostokątnych, α jest miarą kąta leżącego naprzeciw przyprostokątnej długości *a*. Wiedząc,	Zadanie 1. Wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\sin\ \alpha - \cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oblicz $\text{tg}\ \alpha + \text{ctg}\ \alpha$. Zadanie 2. Balon wznosi się pionowo. W chwili, gdy znajduje się na wysokości *h* metrów nad ziemią, osoba lecąca balonem mierzy kąt depresji α przedmiotu znajdującego się na ziemi. Po upływie *t* sekund powtarza pomiar i otrzymuje kąt β. Z jaką średnią prędkością *v* wznosi się balon?

Zadanie 3. Kąt wzniesienia wieży, zmierzony w odległości 80 m od jej podstawy, ma miarę 48°. Jaką wysokość ma wieża? Zadanie 4. Wyznacz, korzystając z definicji, wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120°. Zadanie 5. Oblicz, stosując odpowiednie wzory redukcyjne, wartość wyrażenia: a) $\sin 135° + \mathrm{tg}\, 120° \cdot \cos 150°$ b) $\sin^2 17° + \sin^2 73° - \cos 120°$. Zadanie 6. Oblicz, bez użycia tablic i kalkulatora: $\mathrm{tg}\, 30° \cdot \mathrm{tg}\, 40° \cdot \mathrm{tg}\, 130°$. Zadanie 7. Zbuduj kąt o mierze α, $\alpha \in (90°, 180°)$ takiej, że a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ b) $\mathrm{ctg}\, \alpha = -4$. Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.	że $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$, oblicz: a) tangens α b) wartość wyrażenia: $\frac{b}{a+b} + \frac{a^2}{a^2-b^2}$. Zadanie 4. Sprawdź, czy równość $\frac{coa\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}$ jest tożsamością trygonometryczną, wiedząc, że $\alpha \in (0°, 90°)$. Zadanie 5. Niech α, β, γ oznaczają miary kątów dowolnego trójkąta. Wykaż, że prawdziwa jest zależność: $\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\beta+\gamma}{2}$.	

7. Geometria płaska – pole koła, pole trójkąta

Tematyka zajęć:

- Pole figury geometrycznej
- Pole trójkąta, cz. 1
- Pole trójkąta, cz. 2
- Pola trójkątów podobnych
- Pole koła, pole wycinka koła

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – rozumie pojęcie pola figury; zna wzór na pole kwadratu i pole prostokąta; – zna następujące wzory na pole trójkąta: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, gdzie a – długość boku trójkąta równobocznego $P = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, $P = a \cdot b \cdot \sin \gamma$, gdzie $\gamma \in (0°, 180°)$ $P = \frac{abc}{4R}$, $P = \frac{1}{2} p \cdot r$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$; – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trójkątów, wykorzystując wzory na pole trójkąta i poznane wcześniej twierdzenia; – potrafi obliczyć wysokość trójkąta, korzystając ze wzoru na pole; – potrafi rozwiązywać proste zadania	Uczeń: – potrafi wyprowadzić wzór na pole trójkąta równobocznego i wzory: $P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$, $P = \frac{1}{2} p \cdot r$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$, ze wzoru $P = \frac{1}{2} ah_a$; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności, wykorzystując wzory na pola trójkątów, w tym również z wykorzystaniem poznanych wcześniej własności trójkątów; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne, wykorzystując cechy podobieństwa trójkątów, twierdzenie o polach figur podobnych i uwzględniając wcześniej poznane twierdzenia geometryczne.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem wzorów na pola figur i innych twierdzeń.

geometryczne dotyczące trójkątów, wykorzystując wzory na ich pola i poznane wcześniej twierdzenia, w szczególności twierdzenie Pitagorasa oraz własności okręgu wpisanego w trójkąt i okręgu opisanego na trójkącie; – zna twierdzenie o polach figur podobnych; potrafi je stosować przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna wzór na pole koła i pole wycinka koła; umie zastosować te wzory przy rozwiązywaniu prostych zadań; wie, że pole wycinka koła jest wprost proporcjonalne do miary odpowiadającego mu kąta środkowego koła i jest wprost proporcjonalne do długości odpowiadającego mu łuku okręgu oraz umie zastosować tę wiedzę przy rozwiązywaniu prostych zadań.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Z kawałka trójkątnego materiału o obwodzie 1,12 m i polu 504 cm^2 wycięto koło, styczne do boków tego trójkąta. Oblicz długość promienia wyciętego koła. Zadanie 2. Boki trójkąta mają długość 21 cm, 17 cm, 10 cm. Oblicz: a) pole trójkąta; b) długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt; c) długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.	Zadanie 1. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz stosunek pola koła wpisanego w ten trójkąt do pola koła opisanego na tym trójkącie. Zadanie 2. W trójkącie rozwartokątnym, którego pole jest równe 27 cm^2, dwa boki mają długość 18 cm i 6 cm. Jaką miarę ma kąt zawarty między tymi bokami? Zadanie 3.	Zadanie 1. W trójkącie poprowadzono środkowe, które podzieliły dany trójkąt na sześć mniejszych trójkątów. Wykaż, że pola powstałych trójkątów są równe. Zadanie 2. Wyznacz długość boku *c* trójkąta, jeśli dane są długości a, *b* dwóch jego boków oraz wiadomo, że $h_a + h_b = h_c$, gdzie h_a, h_b, h_c są długościami wysokości opuszczonych na odpowiednie boki tego trójkąta. Zadanie 3.

Zadanie 3.
W trójkącie dwa boki mają długość 12 cm i 10 cm, zaś kąt zawarty między tymi bokami ma miarę 150°. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 4.
W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 6 cm i 8 cm. Korzystając ze wzoru na pole trójkąta, oblicz odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej.

Zadanie 5.
Kąt wpisany w koło ma miarę 45° i jest oparty na łuku długości 3π cm. Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez ten łuk.

Zadanie 6.
Trójkąt równoboczny $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $s = 3$. Pole trójkąta ABC jest równe $4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Oblicz długość boku trójkąta $A'B'C'$.

Na trójkącie ABC, w którym $|AC| = |BC|$, opisano okrąg o środku O i promieniu $R = 20$ cm. Wiedząc, że $|\angle AOB| = 120^\circ$, oblicz pole trójkąta oraz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Rozważ dwa przypadki.

Zadanie 4.
W trójkącie równoramiennym podstawa ma 16 cm długości, a ramię ma 17 cm długości. Oblicz odległość środka wysokości poprowadzonej na podstawę trójkąta od ramienia trójkąta.

Zadanie 5.
Prosta równoległa do podstawy AB trójkąta ABC, przecinająca ramiona AC i BC odpowiednio w punktach D i E, dzieli ten trójkąt na dwie figury o równych polach. W jakim stosunku (licząc od wierzchołka C) dzieli ona ramiona trójkąta?

Zadanie 6.
W wycinek koła o promieniu 6 cm wpisano okrąg o promieniu 2 cm. Oblicz pole wycinka koła.

Wykaż, że okrąg wpisany w trójkąt prostokątny jest styczny do przeciwprostokątnej w punkcie dzielącym ją na dwa odcinki, których iloczyn długości jest równy polu tego trójkąta.

Zadanie 4.
Wykaż, że pole trójkąta wyraża się wzorem: $P = \frac{abc}{4R}$, gdzie a, b, c oznaczają długości boków trójkąta, R to długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, jeśli trójkąt jest:
a) prostokątny
b) ostrokątny.

8. Funkcja i jej własności

Tematyka zajęć:

- Pojęcie funkcji. Funkcja liczbowa. Dziedzina i zbiór wartości funkcji
- Sposoby opisywania funkcji
- Wykres funkcji
- Dziedzina funkcji liczbowej
- Zbiór wartości funkcji liczbowej
- Miejsce zerowe funkcji
- Monotoniczność funkcji
- Funkcje różnowartościowe
- Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu
- Szkicowanie wykresów funkcji o zadanych własnościach
- Zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania równań i nierówności
- Zastosowanie wiadomości o funkcjach do opisywania, interpretowania i przetwarzania informacji wyrażonych w postaci wykresu funkcji

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi odróżnić funkcję od innych przyporządkowań; – potrafi podawać przykłady funkcji; – potrafi opisywać funkcje na różne sposoby: wzorem, tabelką, grafem, opisem słownym; – potrafi naszkicować wykres funkcji liczbowej określonej słownie, grafem, tabelką, wzorem; – potrafi odróżnić wykres funkcji od krzywej, która wykresem funkcji nie jest; – zna wykresy funkcji, takich jak: $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$; – potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem (w prostych przypadkach);	Uczeń: – potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem w przypadku, gdy wyznaczenie dziedziny funkcji wymaga rozwiązania koniunkcji warunków, dotyczących mianowników lub pierwiastków stopnia drugiego, występujących we wzorze; – potrafi obliczyć miejsca zerowe funkcji opisanej wzorem; – potrafi stosować wiadomości o funkcji do opisywania zależności w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym; – potrafi podać opis matematyczny prostej sytuacji w postaci wzoru funkcji; – potrafi naszkicować wykres funkcji kawałkami	Uczeń: – potrafi narysować wykresy takich funkcji, jak: y = reszta z dzielenia x przez 3, gdzie $x \in \boldsymbol{C}$, $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{2x - 6}$, $y = \sqrt{4x^2 + 20x + 25}$ itp. i omówić ich własności; – potrafi (na podstawie definicji) udowodnić, że funkcja jest rosnąca (malejąca) w danym zbiorze; – potrafi (na podstawie definicji) wykazać różnowartościowość danej funkcji.

– potrafi obliczyć miejsce zerowe funkcji liczbowej (w prostych przypadkach); – potrafi obliczyć wartość funkcji liczbowej dla danego argumentu, a także obliczyć argument funkcji, gdy dana jest jej wartość; – potrafi określić zbiór wartości funkcji w prostych przypadkach (np. w przypadku, gdy dziedzina funkcji jest zbiorem skończonym); – potrafi na podstawie wykresu funkcji liczbowej odczytać jej własności, takie jak: a) dziedzina funkcji b) zbiór wartości funkcji c) miejsce zerowe funkcji d) argument funkcji, gdy dana jest wartość funkcji e) wartość funkcji dla danego argumentu f) przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca, stała g) zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie, nieujemne h) najmniejszą oraz największą wartość funkcji; – potrafi interpretować informacje na podstawie wykresów funkcji lub ich wzorów (np. dotyczące różnych zjawisk przyrodniczych, ekonomicznych, socjologicznych, fizycznych); – potrafi przetwarzać informacje dane w postaci wzoru lub wykresu funkcji; – umie na podstawie wykresów funkcji f i g podać zbiór rozwiązań równania $f(x) = g(x)$ oraz nierówności typu: $f(x) < g(x)$, $f(x) \geq g(x)$.	ciągłej na podstawie wzoru tej funkcji; – potrafi na podstawie wykresu funkcji kawałkami ciągłej omówić takie jej własności jak: dziedzina, zbiór wartości, różnowartościowość oraz monotoniczność; – potrafi naszkicować wykres funkcji o zadanych własnościach.	

Przykładowe zadania

Zadanie 1.	Zadanie 1.	Zadanie 1.

Dana jest funkcja określona za pomocą opisu słownego: *„Każdej liczbie ze zbioru* A = *{0, 1, 4, 9, 16} przyporządkowujemy pierwiastek kwadratowy tej liczby”.* Zapisz tę funkcję za pomocą wzoru, a następnie naszkicuj jej wykres w prostokątnym układzie współrzędnych. Podaj zbiór wartości tej funkcji i jej miejsce zerowe.

Zadanie 2.

Dana jest funkcja o wzorze $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{-x}}$.

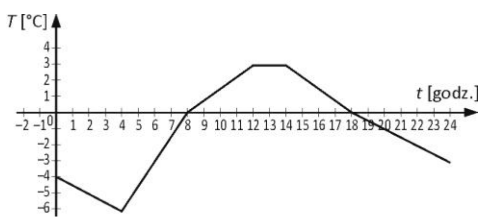
a) Określ dziedzinę tej funkcji.

b) Czy funkcja ta posiada miejsce zerowe? Odpowiedź uzasadnij.

c) Oblicz wartość funkcji dla argumentu (–9).

Zadanie 3.

Poniżej podany jest dobowy wykres temperatury.



Odpowiedz na pytania:

a) W jakich godzinach dokonywano pomiaru?

b) W jakim przedziale mieszczą się zanotowane temperatury?

c) W jakich godzinach temperatura wyniosła 0°?

d) W jakich godzinach temperatura była dodatnia, a w jakich ujemna?

e) W jakich godzinach temperatura rosła, a w jakich malała?

a) Wyznacz dziedzinę funkcji danej wzorem

$$f(x) = \sqrt{3-2x} + \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-x}.$$

b) Wyznacz miejsce zerowe funkcji o wzorze

$$f(x) = \frac{|x+2|-1}{x^2-1}.$$

Zadanie 2.

Naszkicuj wykres funkcji, której dziedziną jest przedział $\langle -6, 6\rangle$; zbiorem wartości jest przedział $\langle 1, +\infty)$; wykres funkcji jest symetryczny względem osi *OY*; funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -6, 0\rangle$ oraz $f(0) = 4$. Czy istnieje tylko jedna taka funkcja?

Zadanie 3.

Naszkicuj wykres i omów własności funkcji określonej wzorem: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \le -2 \\ x^3 & \text{dla } -1 \le x \le 1 \\ \sqrt{x} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$.

a) Oblicz wartość funkcji *f* dla argumentu $3\frac{3}{8}$.

b) Dla jakiego dodatniego argumentu *a* zachodzi równość $f(a) = -f(-a)$?

Zadanie 4.

W pewnym kraju obowiązuje system podatkowy opisany wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \le x \le 800 \\ 0{,}05x - 40 & \text{dla } 800 < x \le 2000 \\ 0{,}2x - 340 & \text{dla } x > 2000 \end{cases},$$

gdzie *x* oznacza wysokość dochodów rocznych podatnika w dolarach, zaś $f(x)$ oznacza wysokość

Dana jest funkcja

$f(x)$ = reszta z dzielenia *x* przez 5,

gdzie $x \in \boldsymbol{C}$.

a) Narysuj wykres tej funkcji dla $x \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

b) Napisz wzór opisujący miejsca zerowe tej funkcji.

c) Podaj zbiór wartości funkcji.

Zadanie 2.

Narysuj wykres funkcji $y = x - [x]$ dla $x \in \langle -3, 4\rangle$ i na podstawie wykresu omów jej własności. Uwaga! Symbolem $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od *x*.

Zadanie 3.

Porównaj dziedziny i wykresy funkcji *f* i *g*, jeśli:

a) $f(x) = |x|$ i $g(x) = \sqrt{x^2}$

b) $f(x) = x$ i $g(x) = \dfrac{x^2}{x}$.

Zadanie 4.

Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji danej wzorem:

$$f(x) = \frac{9x^2 - 12x^2 + 4}{15x - 10}$$

Zadanie 5.

Symbol max(*a*, *b*) oznacza większą z liczb *a*, *b* lub równą *a*, jeśli $a = b$. Naszkicuj wykres funkcji *f*, określonej wzorem: $f(x) = \max(x, x^2)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Zadanie 6.

f) Jaką wartość miała temperatura w godzinach $\langle 12, 14 \rangle$? g) Jaką najniższą wartość wskazał termograf? <u>Zadanie 4.</u> Odległość d [km] ustalonego kolarza peletonu od mety w zależności od czasu jazdy t [h] (od chwili rozpoczęcia wyścigu do chwili przejechania mety) opisuje wzór: $d(t) = 180 - 45t$. a) Ile godzin potrzeba, aby kolarz przejechał linię mety wyścigu? b) W jakiej odległości od mety będzie znajdował się kolarz po 40 minutach jazdy? c) Po jakim czasie od startu kolarz będzie znajdował się 30 km od mety? d) Jaką długość ma etap wyścigu? <u>Zadanie 5.</u> Na podstawie wykresów odpowiednich funkcji rozwiąż: a) równanie $x^2 = x$ b)nierówność $\frac{1}{x} > x^3$.	podatku, jaki zobowiązany jest zapłacić podatnik. Oblicz, który z podatników zapłaci większy podatek i o ile procent większy, jeśli dochód roczny pierwszego z nich wyniósł 1260 USD, zaś drugiego 3480 USD. Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.	Wykaż (na podstawie definicji), że funkcja opisana wzorem $f(x) = x^2$ jest rosnąca w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich.

9. Przekształcenia wykresów funkcji

Tematyka zajęć:

- Podstawowe informacje o wektorze w układzie współrzędnych
- Przesunięcie równoległe. Przesunięcie równoległe wzdłuż osi *OX*
- Przesunięcie równoległe wzdłuż osi *OY*
- Przesunięcie równoległe o wektor $\vec{w} = [p, q]$.
- Symetria osiowa. Symetria osiowa względem osi *OX*
- Symetria osiowa względem osi *OY*
- Symetria środkowa. Symetria środkowa względem punktu (0, 0)

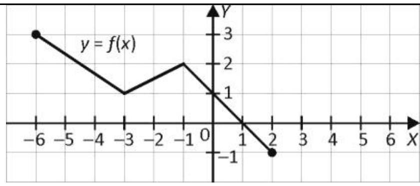
Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna określenie wektora i potrafi podać jego cechy; – potrafi obliczyć współrzędne wektora, mając dane współrzędne początku i końca wektora; potrafi obliczyć współrzędne początku wektora (końca wektora), gdy dane ma współrzędne wektora oraz współrzędne końca (początku) wektora; – potrafi wyznaczyć długość wektora (odległość między punktami na płaszczyźnie kartezjańskiej); – zna określenie wektorów równych i wektorów przeciwnych oraz potrafi stosować własności tych wektorów przy rozwiązywaniu zadań; – potrafi wykonywać działania na wektorach: dodawanie, odejmowanie oraz mnożenie przez liczbę (analitycznie); – potrafi obliczyć współrzędne środka odcinka; – zna pojęcie przesunięcia równoległego o wektor i potrafi wyznaczyć obraz figury w przesunięciu równoległym o dany wektor;	Uczeń: – zna własności działań na wektorach i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności; – potrafi na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ sporządzić wykres funkcji: $y = f(x - a) + b$; – potrafi zapisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu funkcji f o dany wektor; – potrafi na podstawie wykresu funkcji f sporządzić wykresy funkcji: $y = \|f(x)\|$, $y = -f(-x)$; – potrafi zapisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu funkcji f względem osi *OX*, osi *OY*, początku układu współrzędnych; – umie podać własności funkcji: $y = f(x - p) + q$, $y = -f(-x)$, $y = \|f(x)\|$ w oparciu o dane własności funkcji $y = f(x)$; – potrafi stosować własności przekształceń geometrycznych przy rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności.	Uczeń: – potrafi wykorzystać działania na wektorach do dowodzenia różnych twierdzeń geometrycznych; – potrafi naszkicować wykres funkcji, którego sporządzenie wymaga kilku poznanych przekształceń; – potrafi przeprowadzić dyskusję rozwiązań równania z parametrem $f(x) = m$, w oparciu o wykres funkcji f; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania (o podwyższonym stopniu trudności), dotyczące przekształceń wykresów funkcji.

– zna pojęcie symetrii osiowej względem prostej i potrafi wyznaczyć obraz figury w symetrii osiowej względem tej prostej; – zna pojęcie symetrii środkowej względem punktu i potrafi wyznaczyć obraz figury w symetrii środkowej względem dowolnego punktu; – potrafi podać współrzędne punktu, który jest obrazem danego punktu w symetrii osiowej względem osi OX oraz osi OY; – potrafi podać współrzędne punktu, który jest obrazem danego punktu w symetrii środkowej względem punktu (0,0); – potrafi narysować wykres funkcji $y = f(x) + q$, $y = f(x - p)$, $y = -f(x)$, y = f(–x) w przypadku, gdy dany jest wykres funkcji $y = f(x)$; – potrafi narysować wykresy funkcji określonych wzorami, np. $y = (x + 3)^2$; $y = \sqrt{x} - 4$; $y = -\frac{1}{x}$; umie podać własności funkcji: $y = f(x) + q$, $y = f(x - p)$, $y = -f(x)$, y = f(–x) w oparciu o dane własności funkcji $y = f(x)$.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Dane są punkty: $A(2, 5)$, $B(-4, 6)$. a) Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$. b) Oblicz długość wektora $\overrightarrow{AB}$. Zadanie 2. Dany jest wektor $\overrightarrow{AB} = [3, -6]$ oraz współrzędne	Zadanie 1. Dane są wektory: $\vec{a} = [1, -1]$, $\vec{b} = [2, -1]$, $\vec{c} = [-5, -7]$. Wyznacz takie liczby rzeczywiste k, l, aby $k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b} = \vec{c}$. Zadanie 2. Dany jest odcinek o końcach $A(2, -5)$, $B(-4, 7)$.	Zadanie 1. Korzystając z działań na wektorach, udowodnij, że: a) odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta ma długość równą połowie długości trzeciego boku tego trójkąta; b) długość odcinka łączącego środki ramion trapezu jest równa średniej arytmetycznej

punktu $B(-1, 4)$. a) Oblicz współrzędne punktu A. b) Wyznacz współrzędne środka odcinka AB. <u>Zadanie 3.</u> Narysuj dowolny trójkąt ABC, a następnie znajdź jego obraz: a) w symetrii środkowej względem punktu O znajdującego się wewnątrz trójkąta; b) w symetrii osiowej względem dowolnej prostej, która nie ma z tym trójkątem punktów wspólnych; c) w przesunięciu równoległym o wektor $\overrightarrow{AC}$. <u>Zadanie 4.</u> W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj odcinek AB, gdzie $A(-2, 4)$, $B(-5, -3)$, a następnie wyznacz współrzędne końców obrazu tego odcinka: a) w symetrii względem osi OX b) w symetrii względem osi OY c) w symetrii względem początku układu współrzędnych d) w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [1, -3]$. <u>Zadanie 7.</u> Dana jest funkcja $f(x) = x^3$. Naszkicuj wykres - funkcji: a) $y = x^3 + 2$; b) $y = (x + 1)^3$; c) $y = -x^3$. <u>Zadanie 8.</u> Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.	Wyznacz współrzędne punktu P, który dzieli odcinek AB w taki sposób, że $\frac{\lvert PB\rvert}{\lvert AB\rvert} = \frac{1}{3}$. <u>Zadanie 3.</u> O jaki wektor należy przesunąć równolegle wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x} - 3$, aby otrzymać wykres funkcji: a) $g(x) = \sqrt{x} + 1$ b) $h(x) = \sqrt{x+2}$? <u>Zadanie 4.</u> Dana jest funkcja $g(x) = 2x - 6$. Jej wykres powstał w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Wyznacz wzór funkcji f. <u>Zadanie 5.</u> Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \lvert x - 2\rvert$. Na podstawie wykresu tej funkcji rozwiąż: a) równania: $\lvert x - 2\rvert = 3$; $\lvert x - 2\rvert = x$ b) nierówności: $\lvert x - 2\rvert \le 2$; $\lvert x - 2\rvert > x^2$.	długości podstaw tego trapezu. <u>Zadanie 2.</u> Naszkicuj wykresy funkcji: a) $y = -\frac{1}{x+1} - 2$ b) $y = \lvert x^3 - 1\rvert$ c) $y = -\sqrt{-x} + 3$ d) $y = \lvert\lvert x + 5\rvert - 3\rvert$ <u>Zadanie 3.</u> W oparciu o wykres odpowiedniej funkcji podaj liczbę rozwiązań równania, w zależności od wartości parametru m: a) $\lvert x - 5\rvert - 2 = m$ b) $\left\lvert \frac{1}{x} - 2\right\rvert = m$.

 a) Napisz wzór funkcji *g*, której wykres powstanie w wyniku przesunięcia wykresu funkcji *f* wzdłuż osi *OX* o 4 jednostki w prawo. Jakie miejsca zerowe ma funkcja *g*? b) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji *h*, której wykres otrzymamy w wyniku przekształcenia wykresu funkcji *f* w symetrii względem osi *OX*.		

10. Funkcja liniowa

Tematyka zajęć:

- Proporcjonalność prosta
- Funkcja liniowa. Wykres funkcji liniowej
- Miejsce zerowe funkcji liniowej. Własności funkcji liniowej
- Znaczenie współczynników we wzorze funkcji liniowej
- Równoległość i prostopadłość wykresów funkcji liniowych o współczynnikach kierunkowych różnych od zera
- Zastosowanie wiadomości o funkcji liniowej w zadaniach z życia codziennego
- Równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- Zastosowanie układów równań liniowych do rozwiązywania zadań tekstowych

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – wie, jaką zależność między dwiema wielkościami zmiennymi nazywamy proporcjonalnością prostą; potrafi wskazać współczynnik proporcjonalności; rozwiązuje zadania tekstowe z zastosowaniem proporcjonalności prostej; – zna pojęcie funkcji liniowej; – potrafi interpretować współczynniki we wzorze funkcji liniowej; – potrafi sporządzić wykres funkcji liniowej danej wzorem; – potrafi na podstawie wykresu funkcji liniowej (wzoru funkcji) określić monotoniczność funkcji; – potrafi wyznaczyć algebraicznie i graficznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja liniowa przyjmuje wartości dodatnie (ujemne,	Uczeń: – potrafi przeprowadzić dowód warunku na prostopadłość wykresów funkcji liniowych o współczynnikach różnych od zera; – potrafi rozwiązywać zadania z wartością bezwzględną i parametrem dotyczące własności funkcji liniowej (o średnim stopniu trudności); – potrafi naszkicować wykres funkcji kawałkami liniowej i na jego podstawie omówić własności danej funkcji; – potrafi wyznaczyć algebraicznie miejsca zerowe funkcji kawałkami liniowej oraz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji i osi *OY*; – potrafi wyznaczyć algebraicznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja kawałkami liniowa przyjmuje wartości dodatnie (ujemne);	Uczeń – rozwiązuje zadania nietypowe, o podwyższonym stopniu trudności.

niedodatnie, nieujemne); – potrafi sprawdzić algebraicznie, czy punkt o danych współrzędnych należy do wykresu funkcji liniowej; – potrafi podać własności funkcji liniowej na podstawie wykresu tej funkcji; – wie, że współczynnik kierunkowy *a* we wzorze funkcji $y = ax + b$, oznacza tangens kąta nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi *OX*; – wie, że współczynnik kierunkowy *a* we wzorze funkcji liniowej $y = ax + b$ wyraża się wzorem $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, gdzie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ są punktami należącymi do wykresu tej funkcji; – potrafi znaleźć wzór funkcji liniowej o zadanych własnościach (np. takiej, której wykres przechodzi przez dwa dane punkty; jest nachylony do osi *OX* pod danym kątem i przechodzi przez dany punkt itp.); – potrafi napisać wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie; – potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt o danych współrzędnych; – potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt o danych współrzędnych; – na podstawie wzorów dwóch funkcji liniowych potrafi określić wzajemne położenie ich	– potrafi obliczyć wartość funkcji kawałkami liniowej dla podanego argumentu; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności liniowe z wartością bezwzględną (o średnim stopniu trudności) i interpretować je graficznie; – potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania liniowego z parametrem; – potrafi wyznaczyć wszystkie wartości parametru, dla których zbiorem rozwiązań nierówności liniowej z parametrem jest podany zbiór.	

wykresów; – potrafi rozwiązywać proste zadania z parametrem dotyczące własności funkcji liniowej: – potrafi stosować wiadomości o funkcji liniowej do opisu zjawisk z życia codziennego (podać opis matematyczny zjawiska w postaci wzoru funkcji liniowej, odczytać informacje z wykresu (wzoru), zinterpretować je, przeanalizować i przetworzyć); – potrafi rozwiązać równanie liniowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązać nierówność liniową z jedną niewiadomą i przedstawić jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej; – potrafi rozwiązać układ nierówności liniowych z jedną niewiadomą; – potrafi interpretować graficznie równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązywać algebraicznie proste równania i nierówności liniowe z wartością bezwzględną i interpretować je graficznie np.: $\|x-2\|=3$, $\|x+4\|>2$; – zna pojęcia równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi; – wie, że wykresem równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi jest prosta; – zna pojęcie układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi; – potrafi rozpoznać układ oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny i umie podać ich		

interpretację geometryczną; – potrafi rozwiązywać algebraicznie (metodą przez podstawienie oraz metodą przeciwnych współczynników) układy dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi; – potrafi graficznie rozwiązać układy dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Napisz wzór funkcji liniowej do wykresu, której należą punkty $A(1, 4)$ i $B(-10, 26)$. Naszkicuj wykres tej funkcji i omów jej własności <u>Zadanie 2.</u> a) Napisz wzór funkcji liniowej f, wiedząc, że jej wykres przechodzi przez punkt $A(-\sqrt{3}, -2)$ i jest nachylony do osi OX pod kątem $60°$. b) Napisz wzór funkcji liniowej g, której miejscem zerowym jest liczba 4 i której wykres jest prostopadły do wykresu funkcji f. <u>Zadanie 3.</u> Funkcję liniową g opisuje wzór $g(x) = -3x + 4 + 2m$. Wyznacz wartości parametru m, dla których miejscem zerowym funkcji g jest	<u>Zadanie 1.</u> Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ -x & \text{dla } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ x-2 & \text{dla } x \in (1, +\infty) \end{cases}$. a) Oblicz miejsca zerowe funkcji f oraz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OY. b) Wyznacz algebraicznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne. c) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu 6. d) Naszkicuj wykres funkcji $y = f(x)$ i na jego podstawie naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$; omów własności funkcji $y = g(x)$. <u>Zadanie 2.</u>	<u>Zadanie 1.</u> Wyznacz wzór funkcji liniowej f, która dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ spełnia warunek: $f(2x-1) = -6x + 4$. <u>Zadanie 2.</u> Funkcję $y = \operatorname{sgn}(a)$ (co oznacza: znak liczby a), definiujemy następująco: $\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{dla } a > 0 \\ 0 & \text{dla } a = 0 \\ -1 & \text{dla } a < 0 \end{cases}$ Na podstawie powyższej definicji naszkicuj wykres funkcji: $f(x) = -2\operatorname{sgn}(-3x+1) + 5$.

liczba mniejsza od 9. <u>Zadanie 4.</u> Właściciel sklepu z farbami zaopatruje się w odległej o 120 km fabryce farb i lakierów lub w położonej 10 km od sklepu hurtowni. W hurtowni za puszkę farby sklepikarz płaci 26 zł, zaś w fabryce taka sama puszka farby jest o 20% tańsza. Sklepikarz przywozi towar własnym samochodem, który pali średnio 8 litrów benzyny na 100 km. Litr benzyny kosztuje 5zł. Napisz wzór funkcji, która opisuje całkowity koszt zakupu farb, wraz z kosztami transportu, w przypadku zakupów w hurtowni ($y = h(x)$), jak i w fabryce ($y = f(x)$), gdzie x oznacza liczbę puszek farby. <u>Zadanie 5.</u> Rozwiąż nierówność: $\sqrt{5}\,x > 4x - 1$. <u>Zadanie 6.</u> Przed 10 laty ojciec był dziesięć razy starszy od syna. Za 11 lat będą mieć razem 75 lat. Ile lat ma obecnie każdy z nich? <u>Zadanie 7.</u> Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań $3x + y = 6$ i $5x + 2y = 8$.	Wyznacz zbiór tych wartości parametru m, dla których funkcja liniowa $f(x) = (\|m - 3\| - 5)x - m + 10$ jest rosnąca i jednocześnie wykres tej funkcji przecina oś OY powyżej punktu (0, 8). <u>Zadanie 3.</u> Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których zbiorem rozwiązań nierówności liniowej $(4 - k^2)x + 1 + k > 0$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.	

11. Funkcja kwadratowa

Tematyka zajęć:

- Własności funkcji kwadratowej $y = ax^2$
- Wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej
- Związek między wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej a wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej
- Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej
- Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowych. Odczytywanie własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu
- Najmniejsza oraz największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym
- Badanie funkcji kwadratowej – zadania optymalizacyjne
- Równania kwadratowe
- Nierówności kwadratowe
- Zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi naszkicować wykres funkcji kwadratowej określonej wzorem $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$, oraz omówić jej własności na podstawie wykresu; – zna wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$; – zna wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej $y = a \cdot (x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$; – zna wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej $y = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$; – zna wzory pozwalające obliczyć: wyróżnik funkcji kwadratowej, współrzędne wierzchołka	Uczeń: – potrafi rozwiązywać równania, które można sprowadzić do równań kwadratowych; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą (w tym zadania geometryczne); – potrafi zastosować własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych; – potrafi rozwiązywać zadania z parametrem, o średnim stopniu trudności, dotyczące	Uczeń – potrafi wyprowadzić wzory na miejsca zerowe funkcji kwadratowej; – potrafi wyprowadzić wzory na współrzędne wierzchołka paraboli; – potrafi rozwiązywać różne problemy dotyczące funkcji kwadratowej, które wymagają niestandardowych metod pracy oraz niekonwencjonalnych pomysłów.

paraboli, miejsca zerowe funkcji kwadratowej (o ile istnieją); – potrafi obliczyć miejsca zerowe funkcji kwadratowej lub uzasadnić, że funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych; – potrafi obliczyć współrzędne wierzchołka paraboli na podstawie poznanego wzoru oraz na podstawie znajomości miejsc zerowych funkcji kwadratowej; – potrafi sprawnie zamieniać jedną postać wzoru funkcji kwadratowej na drugą (wzór funkcji w postaci ogólnej, kanonicznej, iloczynowej); – interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej (wzór funkcji w postaci ogólnej, kanonicznej, iloczynowej); – potrafi podać niektóre własności funkcji kwadratowej (bez szkicowania jej wykresu) na podstawie wzoru funkcji w postaci kanonicznej (przedziały monotoniczności funkcji, równanie osi symetrii paraboli, zbiór wartości funkcji) oraz na podstawie wzoru funkcji w postaci iloczynowej (miejsca zerowe funkcji, zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie lub ujemne); – potrafi naszkicować wykres dowolnej funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru; – potrafi na podstawie wykresu funkcji kwadratowej omówić jej własności; – potrafi napisać wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o jej wykresie; – potrafi napisać wzór funkcji kwadratowej	własności funkcji kwadratowej; – potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie dotyczące własności funkcji kwadratowej.	

o zadanych własnościach; – potrafi przekształcić wykres funkcji kwadratowej (symetria względem osi *OX*, symetria względem osi *OY*, symetria względem punktu *O*(0, 0), przesunięcie równoległe o wektor) oraz napisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w danym przekształceniu; – potrafi wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość funkcji kwadratowej w danym przedziale domkniętym; – potrafi algebraicznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą; – potrafi graficznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązywać proste zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązywać proste zadania z parametrem dotyczące własności funkcji kwadratowej; – potrafi przeanalizować zjawisko z życia codziennego, opisane wzorem (wykresem) funkcji kwadratowej.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Dana jest funkcja kwadratowa w postaci iloczynowej $f(x) = -2(x-3)(x+2)$, $x \in \boldsymbol{R}$. a) Napisz wzór funkcji *f* w postaci kanonicznej oraz ogólnej. b) Naszkicuj wykres funkcji *f*.	<u>Zadanie 1.</u> Rozwiąż równanie $8\sqrt[3]{x^2}+7\sqrt[3]{x}-1=0$ <u>Zadanie 2.</u> Wyznacz wszystkie wartości parametru *m* ($m \in \boldsymbol{R}$), przy których funkcja określona wzorem	<u>Zadanie 1.</u> Wiadomo, że miejscami zerowymi funkcji $f(x) = 3x^2 + bx + 15$ są liczby całkowite. Oblicz *b*.

c) Określ zbiór wartości funkcji f, przedziały monotoniczności oraz zbiór tych argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie. <u>Zadanie 2.</u> Dana jest funkcja kwadratowa określona wzorem $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 8$, $x \in \boldsymbol{R}$. a) Wyznacz miejsca zerowe funkcji f. b) Rozwiąż nierówność $f(x) > -8$. c) Wyznacz największą oraz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle 1, 3\rangle$. <u>Zadanie 3.</u> Napisz wzór funkcji kwadratowej, jeśli wiadomo, że do jej wykresu należy punkt $A(1, 3)$ i dla argumentu 2 funkcja przyjmuje swą największą wartość równą 4. <u>Zadanie 4.</u> Liczbę osób zwiedzających wystawę n-tego dnia od momentu jej otwarcia opisuje wzór: $W(n) = -4n^2 + 48n - 24$, gdzie $n \in \{1, 2, ..., 11\}$. Odpowiedz na pytania: a) W którym dniu wystawę odwiedziło najwięcej osób? b) Ile osób odwiedziło wystawę podczas jej trwania? <u>Zadanie 5.</u>	$f(x) = (m-1)x^2 + \sqrt{2}\,x + m$ jest funkcją kwadratową i przyjmuje wartości dodatnie, dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$. <u>Zadanie 3.</u> Suma cyfr liczby trzycyfrowej wynosi 8, zaś suma kwadratów jej cyfr jest równa 30. Jeśli w liczbie zamienimy cyfry skrajne, to otrzymana liczba będzie o 396 większa od początkowej. Znajdź tę liczbę. <u>Zadanie 4.</u> Wykaż, że funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = ax^2 + (a + c)x + c$, gdzie a i c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$, ma co najmniej jedno miejsce zerowe. <u>Zadanie 5.</u> Firma zajmująca się wynajmem lokali ma do dyspozycji 180 pomieszczeń użytkowych. Wszystkie pomieszczenia są zajęte wówczas, gdy koszt wynajmu lokalu za jeden miesiąc wynosi 1200 zł. Firma oszacowała, że każda kolejna podwyżka czynszu o 40 zł zmniejsza o 5 liczbę wynajmowanych pomieszczeń. a) Zapisz wzorem przychód firmy w zależności od liczby podwyżek czynszu, z których każda wyniosła 40 zł. b) Jaki miesięczny koszt wynajmu powinna ustalić firma, aby jej przychód był maksymalny? Ile	

Naszkicuj wykres funkcji $y = 2x^2$, $x \in \boldsymbol{R}$, a następnie przesuń go o wektor $\vec{u} = [-4, 2]$; otrzymany wykres przekształć przez symetrię względem punktu (0, 0). Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymałeś. Omów własności otrzymanej funkcji. <u>Zadanie 6.</u> Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx - 3$, $x \in \boldsymbol{R}$. a) Wyznacz b tak, aby najmniejsza wartość funkcji wynosiła (–4). b) Wyznacz b tak, aby największy zbiór, w którym funkcja jest malejąca, był równy przedziałowi $(-\infty, 6\rangle$. c) Wyznacz b tak, aby wierzchołek paraboli, która jest wykresem tej funkcji, należał do prostej o równaniu $y = 2x$.	wynosi maksymalny przychód?	

12. Geometria płaska – czworokąty

Tematyka zajęć:

- Podział czworokątów. Trapezoidy
- Trapezy
- Równoległoboki
- Wielokąty – podstawowe własności
- Podobieństwo. Figury podobne
- Podobieństwo czworokątów

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna podział czworokątów; – potrafi wyróżnić wśród trapezów: trapezy prostokątne i trapezy równoramienne; poprawnie posługuje się takimi określeniami, jak: podstawa, ramię, wysokość trapezu; – wie, że suma kątów przy każdym ramieniu trapezu jest równa 180° i umie tę własność wykorzystać w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu i umie zastosować je w rozwiązywaniu prostych zadań; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące własności trapezów; – zna podstawowe własności równoległoboków i umie je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – wie, jakie własności ma romb; – zna własności prostokąta i kwadratu;	Uczeń: – umie na podstawie własności czworokąta podanych w zadaniu wywnioskować, jaki to jest czworokąt; – umie udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące czworokątów, w tym trapezów i równoległoboków; – potrafi uzasadnić, że suma miar kątów zewnętrznych wielokąta wypukłego jest stała i wynosi 720°.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące czworokątów.

– wie, co to są trapezoidy, potrafi podać przykłady takich figur; – wie, czym charakteryzuje się deltoid; – rozwiązując zadania dotyczące czworokątów, korzysta z wcześniej poznanych twierdzeń, takich jak twierdzenie Pitagorasa oraz twierdzenie Talesa, wykorzystuje wiedzę na temat trójkątów, stosuje również wiadomości z trygonometrii; – zna i potrafi stosować wzór na liczbę przekątnych wielokąta wypukłego; – zna i potrafi stosować w zadaniach wzór na sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego; – wie, co to jest kąt zewnętrzny wielokąta wypukłego i ile wynosi suma miar wszystkich kątów zewnętrznych wielokąta wypukłego; – wie, jaki wielokąt jest wielokątem foremnym; – zna i rozumie definicję podobieństwa; – potrafi wskazać figury podobne; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące podobieństwa czworokątów.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Różnica miar kątów przeciwległych trapezu równoramiennego wynosi 20°. Oblicz miary kątów trapezu. <u>Zadanie 2.</u> Z kawałka materiału w kształcie trapezu	<u>Zadanie 1</u>. Udowodnij, że w dowolnym czworokącie odcinki łączące środki przeciwległych boków dzielą się w punkcie przecięcia na połowy <u>Zadanie 2.</u> W czworokącie *ABCD* połączono środki boków	<u>Zadanie 1</u>. Uzasadnij, że odcinek łączący środki przekątnych dowolnego trapezu jest równoległy do podstaw i jego długość jest równa połowie różnicy długości podstaw.

prostokątnego o podstawach długości 1,2 m i 0,4 m oraz wysokości 1,5 m wycięto chorągiewkę w kształcie trójkąta równoramiennego, którego podstawą jest dłuższe ramię trapezu, a jeden z wierzchołków należy do krótszego ramienia trapezu. a) Wyznacz długości odcinków, na jakie ten wierzchołek podzielił krótsze ramię trapezu. b) Oblicz długości boków chorągiewki. Wyniki podaj z dokładnością do 0,01 m. <u>Zadanie 3.</u> Skwer ma kształt rombu o boku mającym długość 65 m. Wzdłuż przekątnych rombu biegną alejki spacerowe, z których jedna jest o 70 m dłuższa od drugiej. Oblicz długość tych alejek. <u>Zadanie 4.</u> W jakim wielokącie wypukłym liczba przekątnych jest 5 razy większa od liczby wierzchołków?	i otrzymano prostokąt. Czy można twierdzić, że *ABCD* jest rombem? Odpowiedź uzasadnij. <u>Zadanie 3.</u> Wykaż, że: a) jeśli przekątne prostokąta zawierają się w dwusiecznych jego kątów, to prostokąt jest kwadratem b) jeśli przekątne rombu mają równą długość, to romb jest kwadratem.	

13. Geometria płaska – pole czworokąta

Tematyka zajęć:

- Pole prostokąta. Pole kwadratu
- Pole równoległoboku. Pole rombu
- Pole trapezu
- Pole czworokąta – zadania różne
- Pola figur podobnych
- Mapa. Skala mapy

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
– zna wzory na pola czworokątów, takich jak: kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok oraz trapez i potrafi je stosować w prostych zadaniach, korzystając z wcześniej zdobytej wiedzy (w tym także z trygonometrii); – zna i potrafi stosować w prostych zadaniach zależność między skalą podobieństwa czworokątów a polami tych czworokątów; – potrafi rozwiązywać proste zadania z zastosowaniem skali mapy.	– wie, jak obliczyć pole czworokąta, jeśli dane są długości jego przekątnych i miara kąta, pod jakim przecinają się te przekątne; – potrafi rozwiązywać zadania dotyczące pól czworokątów o średnim stopniu trudności.	– potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące pól czworokątów.

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Wysokości równoległoboku pozostają w stosunku 3 : 5, a jeden bok jest o 6 cm dłuższy od drugiego. a) oblicz obwód równoległoboku; b) wiedząc dodatkowo, że sinus kąta ostrego	Zadanie 1. Różnica pól dwóch kwadratów jest równa 27. Oblicz długość boków kwadratów, wiedząc, że są one liczbami naturalnymi.	Zadanie 1. Pola trójkątów, których podstawami są podstawy trapezu, a wspólnym wierzchołkiem jest punkt przecięcia się przekątnych tego trapezu, wynoszą

równoległoboku jest równy $\frac{\sqrt{5}}{3}$, oblicz pole równoległoboku i jego wysokości. <u>Zadanie 2.</u> Pole trapezu jest równe 21 cm^2, a wysokość jest równa 7 cm. Oblicz długości podstaw trapezu, jeśli jedna z nich jest o 3 cm dłuższa od drugiej. <u>Zadanie 3.</u> Pole kwadratu $A_1B_1C_1D_1$ jest o 69% większe od pola kwadratu *ABCD*. Oblicz skalę podobieństwa tych kwadratów.	<u>Zadanie 2.</u> Oblicz pole równoległoboku, którego przekątne długości 13 cm i 8 cm przecinają się pod kątem 120°. <u>Zadanie 3.</u> Przekątne rombu mają długość 10 cm i 24 cm. Oblicz sinus kąta ostrego tego rombu i na tej podstawie ustal, czy kąt ostry rombu ma miarę większą od 45°, czy mniejszą.	P_1 i P_2. Oblicz pole trapezu.

14. Wielomiany

Tematyka zajęć:

- Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej
- Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów
- Rozkładanie wielomianów na czynniki
- Równania wielomianowe
- Zadania prowadzące do równań wielomianowych

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna pojęcie jednomianu jednej zmiennej i potrafi określić stopień tego jednomianu; – potrafi wskazać jednomiany podobne; – potrafi rozpoznać wielomian jednej zmiennej rzeczywistej; – potrafi uporządkować wielomian (malejąco lub rosnąco); – potrafi określić stopień wielomianu jednej zmiennej; – potrafi obliczyć wartość wielomianu dla danej wartości zmiennej; – potrafi wykonać dodawanie, odejmowanie, mnożenie wielomianów; – potrafi sprawdzić, czy podana liczba jest pierwiastkiem wielomianu; – potrafi rozłożyć wielomian na czynniki poprzez wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias, zastosowanie wzorów skróconego mnożenia: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,	Uczeń: – potrafi rozwiązywać równania wielomianowe, które można sprowadzić do równań kwadratowych przez odpowiednie podstawienie; – potrafi rozwiązywać zadania o wielomianach o średnim stopniu trudności; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań wielomianowych.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania dotyczące wielomianów wymagające niekonwencjonalnych metod lub pomysłów, a także zadania o podwyższonym stopniu trudności z zastosowaniem poznanej wiedzy.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ oraz zastosowanie metody grupowania wyrazów; – potrafi rozwiązywać równania wielomianowe, które wymagają umiejętności rozkładania wielomianów na czynniki wymienionych w poprzednim punkcie; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące własności wielomianów, w których występują parametry.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Określ stopień jednomianu $F(x) = 3(x^7)^3 \cdot (x^4)^5$. <u>Zadanie 2.</u> Oblicz wartość wielomianu $W(x) = x^2 - 2x$ dla $x = \sqrt{2} - 1$. <u>Zadanie 3.</u> Dane są wielomiany: $W(x) = 2x^3 - 3x + 1$ oraz $P(x) = 4x^2 - x + 5$. Wykonaj działania: a) $W(x) - 2P(x)$; b) $W(x) + [P(x)]^2$. <u>Zadanie 4.</u> a) Rozłóż wielomian	<u>Zadanie 1.</u> Rozwiąż równania: a) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$ b) $8x^6 - 65x^3 + 8 = 0$. <u>Zadanie 2.</u> Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + (2a^3 - 6a^2)x^2 + 9a - 28$, którego suma współczynników wynosi zero. a) Wyznacz a. b) Dla znalezionej wartości a rozwiąż równanie $W(x) = 0$.	<u>Zadanie 1.</u> Rozłóż na czynniki wyrażenie $(ab + ac + bc)(a + b + c) - abc$. <u>Zadanie 2.</u> Rozłóż na czynniki, możliwie najniższego stopnia, wielomian $W(x) = 9x^4 + 9$.

$W(x) = -2x^3 + 8x - x^2 + 4$ na czynniki liniowe. b) Wypisz pierwiastki tego wielomianu. <u>Zadanie 5.</u> Dany jest wielomian $W(x) = 3x^3 - 2x^2 + kx$. a) Wyznacz k tak, aby pierwiastkiem tego wielomianu była liczba 1. b) Dla wyznaczonej wartości k wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu. <u>Zadanie 6.</u> Rozwiąż równanie $(2x - 3)(x^2 - 1) = (5x + 6)(x^2 - 1)$.	<u>Zadanie 3.</u> Iloczyn trzech kolejnych liczb nieparzystych jest o 65 większy od różnicy kwadratów liczby największej i najmniejszej. Znajdź te liczby.	

15. Ułamki algebraiczne. Równania wymierne

Tematyka zajęć:

- Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzanie ułamków algebraicznych
- Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych
- Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych
- Proste równania wymierne
- Zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych
- Wykres i własności funkcji $y = \frac{a}{x}$
- Proporcjonalność odwrotna

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi określić dziedzinę ułamka algebraicznego; – potrafi napisać ułamek algebraiczny o zadanej dziedzinie; – potrafi wykonywać działania na ułamkach algebraicznych, takie jak: skracanie ułamków, rozszerzanie ułamków, dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych; – potrafi rozwiązywać proste równania wymierne; – potrafi narysować wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \in \mathbf{R} - \{0\}$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$; – potrafi opisać własności funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$,	Uczeń: – zna definicję funkcji homograficznej $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$, gdzie $a \neq 0$ – potrafi przekształcić wzór funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, gdzie $x \neq -c$, tak by znany był wzór funkcji $y = \frac{a}{x}$ i współrzędne wektora przesunięcia równoległego; – potrafi narysować wykres funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, gdzie $x \neq -c$; – potrafi opisać własności funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, gdzie $x \neq -c$, na podstawie jej	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące wyrażeń wymiernych.

$a \in \boldsymbol{R} - \{0\}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$; – wie, jaką zależność pomiędzy dwiema wielkościami zmiennymi nazywamy proporcjonalnością odwrotną; – potrafi wskazać współczynnik proporcjonalności odwrotnej; – potrafi rozwiązywać proste zadania tekstowe z zastosowaniem wiadomości o proporcjonalności odwrotnej.	wykresu; – potrafi obliczyć miejsce zerowe funkcji homograficznej oraz współrzędne punktu, w którym wykres przecina oś *OY*; – potrafi wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji homograficznej; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności związane z funkcją homograficzną; – potrafi przekształcić wykres funkcji homograficznej w symetrii względem osi *OX*, symetrii względem osi *OY*, symetrii względem punktu (0, 0), w przesunięciu równoległym o dany wektor oraz napisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku tego przekształcenia; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych.	

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> a) Wyznacz te wartości *x*, dla których podane ułamki algebraiczne mają sens liczbowy: $\frac{x+2}{x-3}$, $\frac{x^2+1}{x^2+2x+1}$, $\frac{x}{x^3-4x^2+2x-8}$ b) Podaj przykład ułamka algebraicznego, którego dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{2, 3, 7\}$. <u>Zadanie 2.</u> a) Skróć ułamki algebraiczne: $\frac{2x^4-4x^2}{8x^2}$ oraz	<u>Zadanie 1.</u> Wykres funkcji homograficznej o wzorze $f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$ otrzymamy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = \frac{a}{x}$ o pewien wektor. a) Wyznacz wzór funkcji $y = \frac{a}{x}$ oraz współrzędne wektora przesunięcia. b) Oblicz miejsce zerowe funkcji *f* oraz	<u>Zadanie 1.</u> Z równania $\frac{1}{y-1} - \frac{1}{x+1} = 1$ wyznacz *y* jako funkcję zmiennej *x*. Następnie naszkicuj wykres tej funkcji i omów jej własności.

$\frac{(2x-1)(x+4)}{4x^2-1}$; podaj konieczne założenia. b) Wykonaj dodawanie oraz odejmowanie ułamków algebraicznych: $\frac{x}{x-2}+\frac{2x+3}{x+4}$ oraz $\frac{x-5}{2x+3}-\frac{3}{4x^2-9}$; podaj konieczne założenia. c) Wykonaj mnożenie oraz dzielenie wyrażeń wymiernych: $\frac{x^2-4}{2x^2-x}\cdot\frac{2x-1}{5x+10}$ oraz $\frac{x^2+4x+4}{x^2-16}:\frac{x+2}{2x-8}$; podaj konieczne założenia. <u>Zadanie 3.</u> Dana jest funkcja o wzorze $f(x)=\frac{2}{x}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}-\{0\}$. a) Naszkicuj wykres funkcji *f* i na jego podstawie omów własności funkcji. b) Dla jakiego argumentu wartość funkcji *f* wynosi 22? c) Wyznacz wartość funkcji *f* dla argumentu 100. d) Sprawdź, czy do wykresu funkcji *f* należy punkt o współrzędnych $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}, \sqrt{3}+1\right)$. <u>Zadanie 4.</u>	współrzędne punktu, w którym wykres funkcji przecina oś *OY*. c) Naszkicuj wykres funkcji *f*. d) Podaj przedziały monotoniczności funkcji *f*. <u>Zadanie 3.</u> Dwie sekretarki wykonały pewną pracę w ciągu 12 godzin. Gdyby pierwsza wykonała sama połowę pracy, a następnie druga resztę, to zużyłaby na to 25 godzin. W ciągu ilu godzin każda z sekretarek, pracując oddzielnie, może wykonać tę pracę? <u>Zadanie 3.</u> Rozwiąż równania: a) $\frac{x+2}{x+3}+\frac{x}{x-2}=\frac{10}{x^2+x-6}$ b) $\frac{x}{x^2+6x+9}=\frac{1}{x+3}$.	

Rozwiąż równanie $\frac{2x-3}{x+5}=\frac{x-5}{x+2}$. <u>Zadanie 5.</u> Promień dużego koła bicyklu ma długość 54 cm, a promień małego kółka – 20 cm. Oblicz, ile obrotów wykonało małe kółko, jeśli w tym samym czasie duże koło obróciło się 50 razy. Jaką odległość pokonał wtedy bicykl?		

16. Ciągi

Tematyka zajęć:

- Określenie ciągu. Sposoby opisywania ciągów
- Monotoniczność ciągów
- Ciąg arytmetyczny
- Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
- Ciąg geometryczny
- Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego
- Lokaty pieniężne i kredyty bankowe

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna definicję ciągu (ciągu liczbowego); – potrafi wyznaczyć dowolny wyraz ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym; – potrafi narysować wykres ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym; – potrafi podać własności ciągu liczbowego na podstawie jego wykresu; – zna definicję ciągu arytmetycznego; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na sumę *n* kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; – zna definicję ciągu geometrycznego; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań	Uczeń: – potrafi wypisać kilka kolejnych wyrazów ciągu danego wzorem rekurencyjnym; – potrafi sprawdzić, które wyrazy ciągu należą do danego przedziału; – potrafi zbadać na podstawie definicji monotoniczność ciągu określonego wzorem ogólnym; – potrafi zbadać na podstawie definicji, czy dany ciąg określony wzorem ogólnym jest arytmetyczny; – potrafi zbadać na podstawie definicji, czy dany ciąg określony wzorem ogólnym jest geometryczny; – potrafi wykorzystać średnią arytmetyczną do obliczenia wyrazu środkowego ciągu arytmetycznego; – potrafi wykorzystać średnią geometryczną do obliczenia wyrazu środkowego ciągu	Uczeń: – uczeń potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie dotyczące ciągów i ich własności; – potrafi udowodnić wzór na sumę *n* kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; – potrafi udowodnić wzór na sumę *n* kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

wzór na sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego; – potrafi wyznaczyć pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego na podstawie informacji o innych wyrazach ciągu; – potrafi znaleźć wzór na wyraz ogólny ciągu arytmetycznego; – potrafi wyznaczyć pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego na podstawie informacji o wartościach innych wyrazów ciągu; – potrafi znaleźć wzór na wyraz ogólny ciągu geometrycznego; – potrafi rozwiązywać zadania z życia codziennego dotyczące ciągu arytmetycznego i geometrycznego; – potrafi stosować procent prosty i składany w zadaniach dotyczących oprocentowania lokat i kredytów.	geometrycznego; – potrafi rozwiązywać różne zadania dotyczące ciągu arytmetycznego lub ciągu geometrycznego, które wymagają rozwiązania układów równań o podwyższonym stopniu trudności; – potrafi rozwiązywać zadania mieszane dotyczące ciągu arytmetycznego i geometrycznego.	

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = 4 - \frac{2}{n}$. a) Wypisz sześć początkowych wyrazów ciągu. b) Narysuj wykres tego ciągu. c) Czy ciąg jest ciągiem rosnącym? Odpowiedź uzasadnij. d) Zbadaj, czy istnieje taki wyraz ciągu, który jest równy $\frac{15}{4}$.	<u>Zadanie 1.</u> Dla jakich x liczby $2x^3 + 9x$, $x^2 + x$, $-3x - 4$ są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n)? Dla znalezionej wartości x napisz wzór ogólny ciągu (a_n) i zbadaj na podstawie definicji jego monotoniczność. <u>Zadanie 2.</u> Za trzy książki, których ceny tworzą ciąg	<u>Zadanie 1.</u> Udowodnij, że trzy liczby a, b, c tworzące ciąg geometryczny spełniają warunek: $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$. <u>Zadanie 2.</u> Wykaż, że jeśli S_n, S_{2n}, S_{3n} oznaczają odpowiednio sumę n, $2n$, $3n$ początkowych wyrazów ciągu

Zadanie 2.

Maszynistka miała do przepisania książkę liczącą 586 stron. Przez pierwsze 3 dni przepisywała po 14 stron dziennie. Aby jednak przyspieszyć przepisywanie całości, postanowiła, że czwartego dnia przepisze o 2 strony więcej niż trzeciego i każdego następnego dnia przepisze o 2 strony więcej niż poprzedniego. W ciągu ilu dni przepisała całą książkę?

Zadanie 3.

Piłka, odbijając się od ziemi, osiągnęła za każdym razem wysokość wynoszącą $\frac{2}{3}$ poprzedniej. Jak wysoko wzniosła się piłka po pierwszym uderzeniu, jeśli po szóstym odbiła się na wysokość 32 cm?

Zadanie 4.

Pan X umówił się z panem Y, że będzie mu wypłacał codziennie przez trzy tygodnie pieniądze, przy czym pierwszego dnia 10 zł, drugiego 20 zł, trzeciego 30 zł, czwartego 40 zł itd. W zamian pan Y wypłaci mu pierwszego dnia 1 grosz, drugiego 2 grosze, trzeciego 4 grosze, czwartego 8 groszy itd. Który z panów zyska na tej umowie i ile?

Zadanie 5.

Pan Kowalczyk wpłacił 2500 zł na cztery lata na lokatę w banku. Jaką kwotę będzie miał na koncie

geometryczny, zapłacono 61 zł. Za pierwszą i drugą razem zapłacono o 11 zł więcej niż za trzecią. Ile zapłacono za trzecią książkę?

Zadanie 3.

Trzy liczby, których suma wynosi 15, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli do pierwszej z nich dodamy 2, do drugiej 3, a do trzeciej 8, to otrzymane liczby utworzą ciąg geometryczny. Znajdź te liczby.

Zadanie 4.

Rozwiąż równanie:

$(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + ... + (x + 28) = 155$, jeśli wiadomo, że po lewej stronie równania występuje suma wyrazów ciągu arytmetycznego.

arytmetycznego (a_n), to $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.

po tym okresie, jeśli oprocentowanie lokaty wynosi 10% w skali roku, a odsetki kapitalizuje się co 6 miesięcy?		

17. Potęgi. Logarytmy. Funkcja wykładnicza

Tematyka zajęć:

- Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie
- Funkcja wykładnicza i jej własności
- Proste równania wykładnicze
- Proste nierówności wykładnicze
- Zastosowanie funkcji wykładniczej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym
- Logarytm – powtórzenie wiadomości
- Proste równania logarytmiczne

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych; – zna prawa działań na potęgach i potrafi je stosować w obliczeniach; – zna definicję funkcji wykładniczej; – potrafi odróżnić funkcję wykładniczą od innych funkcji; – potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw; – potrafi opisać własności funkcji wykładniczej na podstawie jej wykresu; – potrafi przekształcać wykresy funkcji wykładniczych (S_{OX}, S_{OY}, $S_{(0,0)}$, przesunięcie równoległe o dany wektor); – potrafi rozwiązywać graficznie proste równania oraz nierówności z wykorzystaniem wykresu funkcji wykładniczej; – rozwiązuje proste równania wykładnicze	Uczeń: – potrafi zastosować proste równania i nierówności wykładnicze w rozwiązywaniu zadań dotyczących własności funkcji wykładniczych oraz innych zagadnień (np. ciągów); – potrafi sprawnie przekształcać wyrażenia zawierające logarytmy, stosując poznane twierdzenia o logarytmach.	Uczeń : – rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności.

sprowadzające się do równań liniowych i kwadratowych; – rozwiązuje proste nierówności wykładnicze sprowadzające się do nierówności liniowych i kwadratowych; – posługuje się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym; – potrafi obliczyć logarytm liczby dodatniej; – zna i potrafi stosować wzory na: logarytm iloczynu, logarytm ilorazu, logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Naszkicuj wykres funkcji: a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i na podstawie wykresu omów własności funkcji *f*. Zadanie 2. Rozwiąż równanie i nierówność: a) $(0{,}5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = \frac{1}{64}$	Zadanie 1. Rozwiąż równanie $\frac{3^{x+1}}{81} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x-1}{x}}$ Zadanie 2. Rozwiąż nierówność: $0{,}7^{2+4+6+\ldots+2x} \geq 0{,}7^{12}$ i $x \in \boldsymbol{N}_+$. Zadanie 3. Funkcja $f(x)=2^{x-4}+1$ oraz funkcja $g(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{m+x} - \frac{1}{4}$ przyjmują dla pewnego argumentu tę samą wartość równą 1,25. Oblicz *m*.	Zadanie 1. Wiedząc, że $\log_{14}2 = a$ i $\log_{14}5 = b$, oblicz $\log_7 50$.

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+4} \le \frac{4}{9}$. Zadanie 3. Rozwiąż graficznie nierówność: $2^{x-2} \le 5 - x$. Zadanie 4. Naukowcy zauważyli, że z powodu zmian środowiska naturalnego pewien gatunek zwierząt liczący obecnie 1000 sztuk może wyginąć. Oszacowali, że po *t* latach gatunek ten będzie liczył (w przybliżeniu) $N(t)=1000 \cdot (0{,}9)^t$ sztuk. Oblicz, ile osobników tego gatunku będzie po 5 latach. Zadanie 5. Oblicz: a) $\log_2 16$, b) $\log_\pi 1$, c) $\log_{\frac{1}{7}} 49$, d) $\log 10^{12}$. Zadanie 6. Oblicz: a) $\log_2 \frac{\sqrt[3]{4}}{8}$, b) $\log_4 2 + \log_4 32$, b) $\log_{\frac{1}{3}} 324 - 2\log_{\frac{1}{3}} 6$. Zadanie 7. Oblicz *x*, jeśli : a) $\log_x 81 = 4$; b) $\log_2 x = -\frac{2}{3}$.	Zadanie 4. Dwie liczby rzeczywiste *p* i *q* spełniają równania: $p + q = \log_6 3$ oraz $p - q = \log_6 12$. Oblicz *p* i *q*. Zadanie 5. Liczby 2, $2^{x-1} + 4$, $2^{x-2} + 12$ są, w podanej kolejności, trzema początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego. Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów tego ciągu. Zadanie 6. Oblicz wartość wyrażenia $16^{\log_2 \sqrt[4]{2} + \log_4 3}$.	

18. Elementy geometrii analitycznej

Tematyka zajęć:

- Wektor w układzie współrzędnych. Współrzędne środka odcinka
- Równanie kierunkowe prostej. Równanie ogólne prostej
- Równoległość i prostopadłość prostych w układzie współrzędnych
- Odległość punktu od prostej
- Zastosowanie wiadomości o równaniu prostej do rozwiązywania zadań

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi obliczyć współrzędne wektora, gdy dane są współrzędne początku i końca tego wektora; – potrafi wyznaczyć na podstawie współrzędnych wektora i współrzędnych końca (początku) wektora, współrzędne początku (końca) tego wektora; – potrafi obliczyć długość wektora (długość odcinka); – wie, jakie wektory są równe, a jakie przeciwne; – potrafi obliczyć współrzędne wektora będącego sumą (różnicą) dwóch danych wektorów; – potrafi pomnożyć wektor przez liczbę; – potrafi obliczyć współrzędne środka odcinka o danych końcach (wyznaczyć współrzędne	Uczeń: – potrafi wyznaczyć obraz figury geometrycznej (punktu, odcinka, trójkąta, prostej itp.) w symetrii osiowej względem dowolnej prostej oraz w symetrii środkowej względem dowolnego punktu; – potrafi rozwiązywać zadania z geometrii analitycznej, o średnim stopniu trudności, w których wykorzystuje wiedzę o wektorach i prostych; – rozwiązuje zadania, w których występują parametry.	

jednego z końców odcinka, mając dane współrzędne środka odcinka i współrzędne drugiego końca); – potrafi obliczyć współrzędne środka ciężkości trójkąta; – zna pojęcia: równanie kierunkowe proste oraz równanie ogólne prostej: – potrafi napisać równanie kierunkowe prostej, znając kąt nachylenia tej prostej do osi *OX* oraz współrzędne punktu należącego do tej prostej; – potrafi na podstawie równania kierunkowego prostej podać miarę kąta nachylenia tej prostej do osi *OX*; – potrafi napisać równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez dwa dane punkty; – potrafi przekształcić równanie prostej danej w postaci kierunkowej do postaci ogólnej (i odwrotnie – o ile takie równanie istnieje); – zna warunek na równoległość i prostopadłość prostych danych równaniami ogólnymi (kierunkowymi); – potrafi napisać równanie prostej równoległej (prostopadłej) do danej prostej przechodzącej przez dany punkt; – oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych; – zna wzór na odległość punktu od prostej; – potrafi obliczyć odległość danego punktu od danej prostej; – znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, odcinka, trójkąta, prostej itp.)		

w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych; – potrafi rozwiązywać proste zadania z zastosowaniem poznanych wzorów.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Dane są punkty $A(4, 7)$ oraz $B(-4, -1)$. Oblicz: a) współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$; b) długość odcinka AB; c) współrzędne środka odcinka AB. <u>Zadanie 2.</u> Dane są punkty: $A(4, 8)$, $B(3, -1)$, $C(-1, 9)$ oraz $D(2, 15)$. a) Napisz równanie kierunkowe prostej AB oraz równanie ogólne prostej CD; b) Czy proste AB oraz CD są równoległe? Odpowiedź uzasadnij. <u>Zadanie 3.</u> Trójkąt ABC, gdzie $A(-4, 6)$ i $B(8, -2)$, jest równoramienny, w którym $\|AC\| = \|BC\|$. Napisz równanie ogólne prostej, w której zawiera się wysokość trójkąta ABC, poprowadzona z wierzchołka C. <u>Zadanie 4.</u> Oblicz odległość między prostymi k: $x + y - 8 = 0$ oraz l: $y = -x + 7$.	<u>Zadanie 1.</u> Wyznacz wartość parametru p, dla której proste k: $x - py - 2p = 0$ oraz l: $-3x + (2 - p)y - 6 = 0$ są a) równoległe; b) prostopadłe. <u>Zadanie 2.</u> Wyznacz współrzędne punktu P', który jest obrazem punktu $P(3, 5)$, w symetrii osiowej względem prostej k: $x + y - 4 = 0$. <u>Zadanie 3.</u> Dane są punkty $A(-5, 3)$ i $B(1, -3)$. Wyznacz współrzędne punktu C leżącego na osi OY, tak aby pole trójkąta ABC było równe 36. <u>Zadanie 4.</u> W układzie współrzędnych dane są cztery punkty: $A(-5, 2)$, $B(3, -4)$, $C(5, 1)$, $D(1, 4)$. a) Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem; b) Oblicz pole trapezu $ABCD$.	

<u>Zadanie 5.</u> Odcinek *AB*, gdzie $A(-2, -2)$ i $B(6, 3)$ przekształcono przez symetrię osiową względem prostej k: $x = 0$ i otrzymano odcinek $A'B'$. Podaj współrzędne punktów A' i B'.		

19. Elementy kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa

Tematyka zajęć:

- Reguła mnożenia
- Reguła dodawania
- Doświadczenie losowe
- Zdarzenia. Działania na zdarzeniach
- Obliczanie prawdopodobieństwa

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych; – stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania; – zna terminy: doświadczenie losowe, zdarzenie elementarne, przestrzeń zdarzeń elementarnych, zdarzenie, zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe, zdarzenia wykluczające się; – zna twierdzenie o prawdopodobieństwie klasycznym; – zna własności prawdopodobieństwa i umie je stosować w rozwiązaniach prostych zadań; – umie określić (skończoną) przestrzeń zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego i obliczyć jej moc; – umie określić jakie zdarzenia elementarne sprzyjają danemu zdarzeniu; – zna i umie stosować w prostych sytuacjach klasyczną definicję prawdopodobieństwa.	Uczeń: – rozwiązuje zadania z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa o średnim stopni trudności; – oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia doświadczenia wieloetapowego.	Uczeń: – rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności.

Przykładowe zadania

Zadanie 1.

Z cyfr należących do zbioru {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} tworzymy liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach . Ile wśród nich jest :

a) liczb parzystych
b) liczb nieparzystych
c) liczb podzielnych przez 5?

Zadanie 2.

Z talii składającej się z 52 kart losujemy jedną kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania karty , która jest kierem lub damą?

Zadanie 3.

Ze zbioru wszystkich liczb dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana liczba przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

Zadanie 4.

Doświadczenie polega na dwukrotnym rzucie kostką sześcienną do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w pierwszym i drugim rzucie otrzymamy liczbę oczek będącą liczbą pierwszą.

Zadanie 1.

W grupie 20 studentów każdy uprawia jeden sport. W poniższej tabeli przedstawiona jest informacja o uprawianych przez studentów rodzajach sportu, z uwzględnieniem płci studentów.

	Tenis	Siatkówka	Pływanie
Kobiety	4	2	3
Mężczyźni	5	4	2

Wybieramy z grupy jednego studenta. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wybrany student uprawia pływanie;
b) wybrany student jest mężczyzną lub gra w siatkówkę;
c) wybrany student nie gra w tenisa.

Zadanie 2

W loterii jest 15 losów: dwa losy dają wygraną po 10 zł oraz trzy losy dają wygraną po 5 zł, zaś pozostałe losy są przegrywające. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kupując kolejno dwa losy, wygramy 10 zł?

Zadanie 3.

Zadanie 1.

Ze zbioru {–2, –1, 0, 1, 2, 3} losujemy kolejno bez zwracania trzy liczby *a*, *b*, *c* i tworzymy funkcję określoną wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymana funkcja:

a) ma wykres symetryczny względem osi *OY*;
b) jest malejąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

	W pudełku znajdują się 3 kule białe i 7 kul zielonych. Losujemy jedną kulę z pudełka, a następnie z pozostałych kul losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana za drugim razem kula jest zielona.	

20. Elementy statystyki opisowej

Tematyka zajęć:

- Podstawowe pojęcia statystyki. Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej
- Średnia z próby
- Mediana z próby i moda z próby
- Wariancja i odchylenie standardowe

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi odczytywać dane statystyczne z tabel, diagramów i wykresów; – potrafi przedstawiać dane empiryczne w postaci tabel, diagramów i wykresów; – potrafi obliczyć średnią arytmetyczną i średnią ważoną z próby; – potrafi obliczyć medianę z próby; – potrafi wskazać modę z próby; – potrafi obliczyć wariancję i odchylenie standardowe zestawu danych; – potrafi na podstawie obliczonych wielkości przeprowadzić analizę przedstawionych danych; – potrafi określać zależności między odczytanymi danymi.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać proste zadania teoretyczne dotyczące pojęć statystycznych.	

Przykładowe zadania

Zadanie 1.
Pięćdziesiąt osób zdawało egzamin z przepisów ruchu drogowego. Liczba popełnionych przez nie błędów przedstawiona jest w poniższej tabeli:

Liczba błędów	0	1	2	3	4	5
Liczba osób	11	8	14	7	6	4

a) Oblicz średnią liczbę błędów popełnionych przez zdającego.
b) Ile procent zdających zdało egzamin, jeśli do tego można było popełnić co najwyżej dwa błędy?
c) Przedstaw dane na diagramie kolumnowym i zaznacz na nim średnią obliczoną w punkcie a).

Zadanie 2.
Producent czekolady deklaruje, że tabliczka ma wagę 150 g $\pm$ 2 g. Dla zbadania jakości pewnej partii czekolady organizacja konsumencka zbadała wagę losowo wybranych 10 tabliczek czekolady z tej partii i otrzymała następującą ich wagę (w gramach):
150,4 148,9 150,1 152,8 146,6 154,3 150,8
151,1 150,6 149,5
Oblicz średnią wagę tabliczki czekolady i odchylenie standardowe w badanej próbie.
Zastanów się, czy organizacja konsumencka winna zwrócić się do producenta z reklamacją dotyczącą tej partii tabliczek czekolady.

Zadanie 1.
Suma trzech liczb x, y oraz z wynosi 6, a ich wariancja jest równa 21. Oblicz sumę kwadratów tych liczb.

Zadanie 2.
Zestaw trzech liczb a, b i c ma średnią arytmetyczną $\overline{x_1}$ i odchylenie standardowe od średniej równe σ_1.
Zestaw trzech liczb $a+3$, $b+3$ i $c+3$ ma średnią arytmetyczną $\overline{x_2}$ i odchylenie standardowe σ_2.
Wyznacz związek pomiędzy średnimi arytmetycznymi i odchyleniami standardowymi obu zestawów danych.

21. Geometria przestrzenna

Tematyka zajęć:

- Płaszczyzny i proste w przestrzeni
- Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę
- Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni
- Rzut prostokątny na płaszczyznę
- Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych
- Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny
- Graniastosłupy
- Ostrosłupy
- Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu
- Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów
- Przekroje wybranych wielościanów
- Bryły obrotowe. Pole powierzchni brył obrotowych
- Objętość brył obrotowych

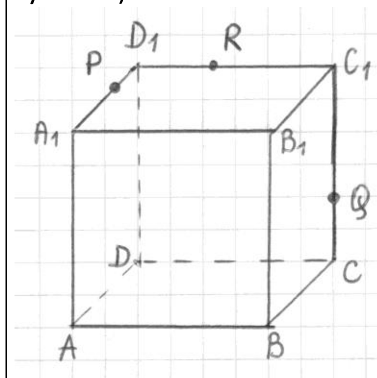
Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi określić położenie dwóch płaszczyzn w przestrzeni; – potrafi określić położenie prostej i płaszczyzny w przestrzeni; – potrafi określić położenie dwóch prostych w przestrzeni; – potrafi rysować figury płaskie w rzucie równoległym na płaszczyznę; – umie scharakteryzować prostopadłość prostej	Uczeń: – określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną; – zna i umie stosować twierdzenia charakteryzujące ostrosłup prosty; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne dotyczące brył o średnim stopniu trudności, z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń.	Uczeń: – potrafi skonstruować przekrój wielościanu płaszczyzną i udowodnić poprawność konstrukcji; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne dotyczące brył, z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń.

i płaszczyzny; – umie scharakteryzować prostopadłość dwóch płaszczyzn; – zna i umie stosować twierdzenie o trzech prostych prostopadłych; – rozumie pojęcie kąta miedzy prostą i płaszczyzną; – rozumie pojęcie kąta dwuściennego, poprawnie posługuje się terminem „kąt liniowy kąta dwuściennego"; – zna określenie graniastosłupa; umie wskazać: podstawy, ściany boczne, krawędzie podstaw, krawędzie boczne, wysokość graniastosłupa; – zna podział graniastosłupów; – umie narysować siatki graniastosłupów prostych; – zna określenie ostrosłupa; umie wskazać: podstawę, ściany boczne, krawędzie podstaw, krawędzie boczne, wysokość ostrosłupa; – zna podział ostrosłupów; – umie narysować siatki ostrosłupów prostych; – rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów; – rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów; – rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami; – zna określenie walca; umie wskazać: podstawy,		

powierzchnię boczną, tworzącą, oś obrotu walca; – rozumie określenie przekrój osiowy walca; – zna określenie stożka; umie wskazać: podstawę, powierzchnię boczną, tworzącą, wysokość, oś obrotu, wierzchołek stożka; – rozumie określenie przekrój osiowy stożka – zna określenie kuli; – rozpoznaje w walcach i stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą); oblicza miary tych kątów; – umie obliczać objętość i pole powierzchni poznanych graniastosłupów; – umie obliczać objętość i pole powierzchni poznanych ostrosłupów prawidłowych; – umie obliczać objętość i pole powierzchni brył obrotowych (stożka, kuli, walca); – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące brył, w tym z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych wcześniej twierdzeń.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym suma długości jego krawędzi jest równa 68 cm, a pole powierzchni całkowitej 190 cm^2. Oblicz długość krawędzi graniastosłupa. Zadanie 2.	Zadanie 1. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6 cm i 8 cm. Wszystkie krawędzie boczne mają długość 10 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa. Zadanie 2.	Zadanie 1. Trójkąt równoramienny o obwodzie długości k i kącie przy wierzchołku α, obraca się wokół podstawy. Oblicz objętość powstałej bryły. Zadanie 2.

Podstawą ostrosłupa *ABCS* jest trójkąt *ABC*. Krawędź *AS* jest wysokością tego ostrosłupa. Oblicz objętość ostrosłupa *ABCS*, wiedząc, że $\|AS\| = 8$, $\|BS\| = \|CS\| = 10$ oraz $\|BC\| = 4$. <u>Zadanie 3.</u> W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym o wysokości $2\sqrt{3}$ cm, ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej ostrosłupa. <u>Zadanie 4.</u> Znajdź pole powierzchni całkowitej walca, którego pole powierzchni bocznej jest równe P_b i którego przekrojem osiowym jest kwadrat.	Sześcian o krawędzi 4 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem: a) 45^{o} b) 60^{o}. Oblicz pole otrzymanego przekroju. <u>Zadanie 3.</u> Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma 6 cm długości, a wysokość graniastosłupa jest równa $3\sqrt{2}$ cm. Wyznacz miarę kąta między przekątną ściany bocznej a płaszczyzną sąsiedniej ściany bocznej.	Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Punkty *P*, *Q*, *R*, leżą odpowiednio na krawędziach A_1D_1, CC_1, D_1C_1 (zobacz rysunek).  Skonstruuj przekrój sześcianu płaszczyzną *PQR*. Uzasadnij konstrukcję.